ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОИ МАТЕМАТИКИ им. М.В.КЕЛДЫША АН СССР

Д.С.Каменецкий, С.В.Цынков

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ОТОБРАЖЕНИИ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕИ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ РЕШЕНИЯМИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИИ БЕЛЬТРАМИ

Москва 1990 г.

Аннотация

Гомеоморфное решение системы уравнений Бельтрами осуществляет конформное отображение криволинейной двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ с заданной римановой метрикой на плоскость $\mathbb{R}^2$. В данной работе предлагается способ сведения задачи об отыскании отображения внешности ограниченной области на внешность единичного круга (или ограниченной области на единичный круг) к краевой задаче первого рода для одного эллиптического уравнения второго порядка. В качестве численного алгоритма для реализации отображения можно использовать сочетание метода разностных потенциалов и многосеточного метода. Одно из возможных применений квазиконформных отображений - построение ортогональных сеток локально-моноклинных координат для расчетов трехмерных пограничных слоев вблизи криволинейных поверхностей.

Abstract

Univalent solution of Beltrami equations realizes the conformal mapping of 2-D curvilinear surface with given Riemann metric onto the Euclid plane. In this paper the problem of quasiconformal mapping of simply connected exterior domain onto the exterior of the unit circle comes to the first-kind boundary-value problem for one second-order elliptic equation (analogous construction is given for the mapping of restricted simple-connected domain onto the unit circle). It is possible to use the method of difference potentials in common with multigrid technique for numerical solution of this problem. One of possible applications of quasiconformal mappings is the construction of (orthogonal) grids on the curvilinear surfaces for computation of 3-D boundary layers.

§1. Введение

Рассмотрим двумерную (криволинейную) поверхность в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Будем считать, что она задана параметрически:

$$\xi^i = \xi^i(x,y), \quad i = 1,2,3. \tag{1}$$

Функции в (1) обладают непрерывными первыми производными. Тогда на поверхности можно ввести риманову метрику (первую квадратичную форму), которая задается соотношениями [7]:

$$\begin{aligned} a &\equiv g_{11} = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\xi^i}{\partial x}\right]^2, \\ b &\equiv g_{12} \equiv g_{21} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\xi^i}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi^i}{\partial y}, \\ c &\equiv g_{22} = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\xi^i}{\partial y}\right]^2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\Delta = g^2 = g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}\cdot g_{21} = a\cdot c - b^2 > 0.$$

Поставим задачу об отыскании отображения $W\colon \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ - комплексная плоскость), конформного относительно метрики (2), т.е. отображения, которое угол θ, найденный в метрике (2), переводит в угол θ в евклидовой метрике [1]. Эта задача приводит к системе из двух линейных уравнений эллиптического типа:

$$\begin{aligned} g\cdot u_x &= -b\cdot v_x + a\cdot v_y \\ g\cdot u_y &= -c\cdot v_x + b\cdot v_y \end{aligned} \tag{3}$$

относительно функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, осуществляющих отображение. Здесь $W(z) = u(z) + i\cdot v(z)$, $z = x + i\cdot y$. (3) носит название системы уравнений Бельтрами, к решению той же системы сводится задача о приведении положительно определенной квадратичной формы: $a(x,y)\cdot dx^2 + 2b(x,y)\cdot dx\cdot dy + c(x,y)\cdot dy^2$ к каноническому виду [4, 7]. Очевидно, что отображения, осуществляемые решениями системы (3), можно трактовать как построение новой параметризации поверхности, сохраняющей углы. Эти отображения называются квазиконформными [1, 2, 4]. В случае $b \equiv 0$, $a \equiv c \equiv 1$ система (3) переходит в уравнения Коши-Римана для аналитических функций, осуществляющих конформные отображения плоских областей.

Вводя комплексные обозначения: $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right]$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right]$, перепишем (3) в виде [1, 4]:

$$W(z)_{\bar z} - q(z)\cdot W(z)_z = 0, \tag{4}$$

$$\text{где } q(z) = \frac{a - c + 2i\cdot b}{a + c + 2b}, \quad |q(z)| \le q_0 < 1. \qquad (5)$$

Систему (4) можно рассматривать при минимальнах ограничениях на гладкость коэффициентов. Именно, если $q(z)$ - измеримая ограниченная функция, то решения $W(z)$ можно искать в классе функций, имеющих обобщенные производные $W_{\bar z}$ и W_z из L_p. В этих предположениях удается доказать существование глобального гомеоморфизма, т.е. взаимно-однозначного и взаимно-непрерывного отображения плоскости на плоскость [4]. Мы везде далее будем предполагать наличие определенной гладкости у коэффициентов и у решения (4), (5), не оговаривая отдельно каждый конкретный случай. Отметим, что для системы Бельтрами имеют место теоремы о возрастании гладкости решения при возрастаниии гладкости коэффициентов [4].

Зассмотрим теперь задачу о квазиконформном отображении области на область, здесь имеет место аналог теоремы Римана. Для двух односвязных областей $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}^*$ с границами, состоящими более, чем из одной точки, существует гомеоморфное отображение $W\colon \mathbb{G} \longmapsto \mathbb{G}^*$, удовлетворяющее (4). Оно однозначно определяется заданием трех вещественных параметров, например, образов одной внутренней и одной граничной точки или образа внутренней точки и значения аргумента производной в ней [2]. Это легко следует из существования глобального гомеоморфизма и того факта, что $F(W(z))$ есть решение (4) при условии, что $W(z)$ - решение (4), а $F(\cdot)$ - произвольная аналитическая функция [3, 4]. Для наших целей достаточно считать, что существует некоторый большой круг, вне которого $q(z) \equiv 0$. Если теперь $\mathbb{G}$ и/или $\mathbb{G}^*$ содержат бесконечно удаленную точку (т.е. $\mathbb{G} \subset \bar{\mathbb{C}}$ и/или $\mathbb{G}^* \subset \bar{\mathbb{C}}$, где $\bar{\mathbb{C}}$ - расширенная комплексная плоскость), то $W(z)$ является аналитической функцией в окрестности бесконечности в смысле обычного определения [12].

Заметим еще, что всякое решение $W(z)$ произвольной эллиптической системы:

$$W_{\bar z} - \mu\cdot W_z - \nu\cdot \overline{W}_{\bar z} - \alpha\cdot W - \beta\cdot W - \gamma = 0 \qquad (6)$$
$$|\mu| + |\nu| \le k < 1, \ |\alpha| + |\beta| \le k', \ |\gamma| \le k'',$$

является решением некоторой системы Бельтрами [1].

§2. Постановка задачи о квазиконформном отображении.

Пусть $\mathbb{D}_{in} \subset \bar{\mathbb{C}}$, - ограниченная область, $\mathbb{D}_{ex} = \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}_{in}$ - односвязная область, $\Gamma = \partial\mathbb{D}_{in}$ - гладкая кривая. Будем искать квазиконформное отображение $\mathbb{D}_{ex}$ на внешность единичного круга в $\bar{\mathbb{C}}$, даваемое гомеоморфным решением (4), (5): $W\colon \mathbb{D}_{ex} \longmapsto \left\{ w \;\middle|\; |w| > 1 \right\}$. Ниже описана схема решения задачи об отыскании такого отображения, являющаяся обобщением методики, изложенной в [6].

Обозначим $\chi(z)$ основной гомеоморфизм системы Бельтрами, т.е. решение (4), осуществляющее взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение $\bar{\mathbb{C}} \longmapsto \bar{\mathbb{C}}$ и удовлетворяющее соотношениям:

$$\chi(\infty) = \infty, \ z^{-1}\cdot\chi(z) \longmapsto 1 \ \text{ при } \ z \longmapsto \infty. \qquad (7)$$

Поскольку в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $q(z) \equiv 0$, то при $z = \infty$ (4) сводится к условию аналитичности $\chi(z^{-1})$ в нуле [12]. Основной гомеоморфизм всегда существует и определяется с точностью до аддитивной комплексной постоянной [4]. Для системы Коши-Римана, очевидно, $\chi(z) = z$.

Квазиконформное отображение $\mathbb{D}_{ex}$ на внешность единичного круга будем искать в виде:

$$W(z) = exp\big(\psi(z) + Ln\chi(z)\big), \qquad (8)$$
$$\psi(z) = \eta(z) + i\cdot\zeta(z),$$

где берется произвольная ветвь логарифма с разрезом от нуля до бесконечности. От функции $\psi(z)$ в (8) потребуем, чтобы она была ограничена в $\mathbb{D}_{ex}$ и удовлетворяла (4), тогда пара функций $\eta(x,y)$ и $\zeta(x,y)$ удовлетворяют (3). Кроме того, потребуем, чтобы:

$$\eta(z)\Big|_{z\in\Gamma} = -ln|\chi(z)|. \qquad (9)$$

Тогда, очевидно, $|W(z)|\Big|_{z\in\Gamma} = 1$, т.е. граница $\partial\mathbb{D}_{ex}$ ппереходит в единичную окружность. Кроме того, (8) удовлетворяет уравнениям Бельтрами как суперпозиция решения (4) и аналитической функции. Перепишем (8) в виде:

$$W(z) = \chi(z)\cdot e^{\psi(z)} \qquad (10)$$

Из (10) следует, что $W(z)$ - однозначная функция в $\mathbb{D}_{ex}$, не зависящая от выбора ветви логарифма. Кроме того, поскольку $z^{-1}\cdot\chi(z) \longmapsto 1$ при $z \longmapsto \infty$ и $|\psi(z)| \le const$ в $\mathbb{D}_{ex}$, то

$W(\infty) = \infty$. Последнее равенство определяет соответствие при отображении двух внутренних точек и тем самым задает два из трех необходимых вещественных параметров. На выборе третьего параметра мы остановимся ниже.

Запишем теперь (3) для функций $\eta(z)$ и $\zeta(z)$ и исключим ζ, эта процедура приводит к одному эллиптическому уравнению второго порядка для $\eta(x,y)$:

$$L\eta \equiv c(x,y)\cdot\eta_{xx} - 2b(x,y)\cdot\eta_{xy} + a(x,y)\cdot\eta_{yy} + d(x,y)\cdot\eta_x + e(x,y)\cdot\eta_y = 0, \tag{11}$$

где
$$d(x,y) = \frac{1}{g}\cdot(-b_y\cdot g + g_y\cdot b + c_x\cdot g - g_x\cdot c),$$
$$e(x,y) = \frac{1}{g}\cdot(a_y\cdot g - g_y\cdot a - b_x\cdot g + g_x\cdot b).$$

Уравнение (8) эквивалентно условию $\zeta_{xy} = \zeta_{yx}$. Теперь для $\eta(x,y)$ в $\mathbb{D}_{ex}$ может быть поставлена следующая краевая задача первого рода:

$$\begin{aligned} &L\eta = 0 \quad \text{при} \quad z \in \mathbb{D}_{ex}, \\ &\eta(z) = -ln|\chi(z)| \quad \text{при } z \in \Gamma, \\ &|\eta(\infty)| < \infty. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы считаем, что точка $z = 0$ лежит в $\mathbb{D}_{in}$, а $\chi(0) = 0$. Последнему условию всегла можно удовлетворить прибавляя к $\chi(z)$ некоторую комплексную постоянную. В окрестности бесконечно удаленной точки, где $q(z) \equiv 0$, $L \equiv \Delta$ - оператор Лапласа. При естественных предположениях о гладкости коэффициентов оператора L задача (12) имеет в $\mathbb{D}_{ex}$ единственное решение, причем $\eta(z)$ стремится к конечному пределу при $z \longmapsto \infty$. Функция $\zeta(z)$ восстанавливается с помощью известной $\eta(z)$ как интеграл с переменным верхним пределом:

$$\zeta(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g}\cdot(b\cdot\eta_x - a\cdot\eta_y)\cdot dx + \frac{1}{g}\cdot(c\cdot\eta_x - b\cdot\eta_y)\cdot dy, \tag{13}$$
$$z,\ z_0 \in \mathbb{D}_{ex}.$$

Функция $\eta(z)$ - гармоническая вблизи $z = \infty$, а область $\mathbb{D}_{ex} \subset \bar{\mathbb{C}}$ - односвязна, поэтому значение интеграла (13) не зависит от пути интегрирования, а определяется только верхним и нижним пределами (в том числе и для путей, проходящих через $z = \infty$). Отсюда следует, что $\zeta(z)$ - однозначна в $\mathbb{D}_{ex}$ и $|\zeta(\infty)| < \infty$. Кроме того ясно, что выражение (13) определено с точностью до аддитивной вещественной постоянной, которая играет роль третьего

вещественного параметра искомого отображения. Поскольку $\psi(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$ в окрестности $z = \infty$, то $\chi(z)\cdot\psi(z)_z \longmapsto 0$ при $z \longmapsto \infty$. Так как $W(z)_z = \chi(z)\cdot\psi(z)_z\cdot e^{\psi(z)} + \chi(z)_z\cdot e^{\psi(z)} \longmapsto e^{\psi(z)}$ при $z \longmapsto \infty$, то $\alpha_0 = arg W(z)_z\big|_{z\longmapsto\infty} = \zeta(z)\big|_{z\longmapsto\infty}$. Задавая α_0 мы задаем значение $\zeta(z)$ во внутренней точке $z = \infty$ области $\mathbb{D}_{ex}$ и тем самым определяем аддитивную вещественную постоянную в (13). При решении задачи удобно положить $\zeta(\infty) = 0$. Это условие эквивалентно: $\int_0^{2\pi}\zeta(R_1,\varphi)\cdot d\varphi = 0$, где R_1 -радиус достаточно большой окружности, целиком лежащей в области $q(z) \equiv 0$ [6].

Легко видеть, что функция $W(z)$ из (8) является искомым гомеоморфизмом областей $\mathbb{D}_{ex}$ и $\left\{ w \;\middle|\; |w| > 1 \right\}$. Его построение происходит в четыре этапа: вычисление основного гомеоморфизма $\chi(z)$ плоскости на плоскость, о котором подробно сказано ниже, решение краевой задачи (12), восстановление сопряженной функции (13), подстановка в формулу (8).

Отметим, что существует и другая постановка задачи, где построение отображения (4) сводится к построению конформного отображения: $W'(\mathfrak{z})_{\bar{\mathfrak{z}}} = 0$. Именно, пусть известен основной гомеоморфизм $\chi(z)$: $\bar{\mathbb{C}} \longmapsto \bar{\mathbb{C}}$ системы (4). Тогда легко получить образы областей $\mathbb{D}_{in} \longmapsto \mathbb{D}'_{in}$, $\mathbb{D}_{ex} \longmapsto \mathbb{D}'_{ex}$ и образ кривой $\Gamma \longmapsto \Gamma'$ при отображении $\chi(z)$. Пусть теперь $W'(\mathfrak{z})$ - конформное отображение $\mathbb{D}'_{ex}$ на внешность единичного круга. Тогда $W(z) \equiv W'[\chi(z)]$ - искомое квазиконформное отображение. Способ вычисления $W'(\mathfrak{z})$ подробно описан в [6]. Там используется представление $W'(\mathfrak{z}) = exp[\,\eta'(\mathfrak{z}) + i\cdot\zeta'(\mathfrak{z}) + Ln\mathfrak{z}]$ и для функции $\eta'(\mathfrak{z})$ возникает внешняя краевая задача первого рода:

$$\begin{aligned} &\Delta\eta'(\mathfrak{z}) = 0, \ \mathfrak{z} \in \mathbb{D}'_{ex} \\ &\eta'(\mathfrak{z}) = -ln|\mathfrak{z}|, \ \mathfrak{z} \in \Gamma' \\ &|\eta'(\infty)| < \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

(14) - аналог (12).

В рамках этой постановки легко решить вопрос о квазиконформном отображении области с негладкой границей. Пусть на плоскости парметров (x,y) граница Γ области $\mathbb{D}_{in}$ имеет излом с углом θ. Этому углу на поверхности (1) соответствует угол θ', вычисленный в метрике (2). Значение θ' легко определяется по известному θ. Основной гомеоморфизм $\chi(z)$ в силу (4) переводит Γ в Γ' с тем же углом θ' в соответствующей точке, здесь θ' уже в евклидовой метрике. Далее необходимо построить конформное отображение $W'(\mathfrak{z})$ области $\mathbb{D}'_{ex}$ с негладкой границей на внешность единичного круга. Эта задача подробно исследуется в [6], там угол θ' "разворачивается" до π с помощью суперпозиции дробно-линейных и степенной функции, причем используемое промежуточное преобразование однозначно и имеет однозначное обратное.

С вычислительной точки зрения решение (12) методом разностных потенциалов [9] позволяет использовать ту же вспомогательную задачу для уравнения $L\eta = f$, что и при вычислении основного гомеоморфизма (см. ниже, §3). Переход к задаче (14) потребует постановки другой вспомогательной задачи - для уравнения Пуассона $\Delta\eta = f$, последняя легко решается методом Фурье - подробнее в [6].

Рассмотрим теперь задачу об отыскании основного гомеоморфизма $\chi(z)$. Прежде всего отметим очевидный факт, что для данной метрики (2) $\chi(z)$ не зависит от формы области $\mathbb{D}_{ex}$. Имеет место следующая

<u>Теорема.</u> Пусть не имеющая конечных особенностей функция $v(z)\colon \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ удовлетворяет системе Бельтрами и условию роста $z^{-1}\cdot v(z) \longmapsto 1$ при $z \longmapsto \infty$, $v(\infty) = \infty$. Тогда $v(z)$ с точностью до аддитивной постоянной совпадает с основным гомеоморфизмом $\chi(z)$ системы Бельтрами.

<u>Доказательство.</u> Заметим, что фактически здесь требуется доказать однолистность. По теореме о представлении [1, 2, 3, 4] любое решение $v(z)$ системы (4) в области $\mathbb{G}$ может быть представлено в виде $v(z) = \Phi\{\chi(z)\}$, где $\Phi(\mathfrak{z})$ - аналитическая в области $\chi(\mathbb{G})$ функция. В нашем случае $\mathbb{G} = \chi(\mathbb{G}) = \mathbb{C}$ и $v(z)$ не имеет конечных особенностей, поэтому $\Phi(\mathfrak{z})$ также не имеет конечных особенностей. В силу условия роста $z^{-1}\cdot\chi(z) \longmapsto 1$ при $z \longmapsto \infty$ получаем $\mathfrak{z}^{-1}\cdot\Phi(\mathfrak{z}) \longmapsto 1$ при $\mathfrak{z} \longmapsto \infty$, т.е. $\Phi(\mathfrak{z})$ - целая функция, имеющая простой полюс в бесконечности. По теореме

Лиувилля [12] $\Phi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z} + const$, поэтому $v(z) = \chi(z) + const$. Теорема доказана.

Таким образом отыскание основного гомеоморфизма системы Бельтрами сводится к задаче: найти во всей плоскости решение $\chi(z)$ системы (4), удовлетворяющее условию роста $z^{-1}\cdot\chi(z) \longmapsto 1$ при $z \longmapsto \infty$.

Представим $\chi(z)$ в виде:

$$\chi(z) = \omega(z) + z, \qquad |\omega(z)| < const,\ z \in \mathbb{C}. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (4), получим:

$$\omega_{\bar{z}} - q(z)\cdot\omega_z = q(z). \tag{16}$$

Если $\omega(z) = \alpha(x,y) + i\cdot\beta(x,y)$, то для $\alpha(x,y)$ легко получить во всей плоскости следующую задачу:

$$L\alpha = f, \qquad |\alpha(\infty)| < \infty. \tag{17}$$

Оператор L в (17) тот же, что и в (11), правая часть f зависит от q. Функция $\beta(z)$ восстанавливается с помощью интеграла (13) и является однозначной. Аддитивная постоянная определяется из соотношения $\omega(0) = 0$, которое дает $\alpha(0) = 0$. Кроме того, следует требовать $\beta(z) \longmapsto 0$ при $z \longmapsto \infty$, с тем, чтобы выполнялось условие $z^{-1}\cdot\chi(z) \longmapsto 1$ при $z \longmapsto \infty$. Действительно, если $\beta(z) \longmapsto \varphi_0 = const \neq 0$ при $z \longmapsto \infty$, то $z^{-1}\cdot\chi(z) \longmapsto exp(i\cdot\varphi_0)$.

Изложенная схема построения однолистного отображения неограниченных областей практически без изменений переносится на случай отображения ограниченных областей: $\mathbb{D}_{in} \longmapsto \left\{ w \;\middle|\; |w| > 1 \right\}$ (внутренняя задача). Решение (4) по-прежнему ищется в виде (8), задача (15), (16), (17) для основного гомеоморфизма $\chi(z)$ не меняется, а внешняя краевая задача (12) заменяется алгоритмически более простой внутренней, поскольку в процессе решения не приходится учитывать асимптотику на бесконечности.

Отметим еще, что ниже, при изложении схемы численного метода, нам будет удобно пользоваться полярными координатами на плоскости z. Переход к полярным координатам в соотношениях (1) - (17), очевидно, не представляет труда. Например, из (3) следует:

$$g\cdot\zeta_r = b'\cdot\eta_r - \frac{1}{r}\cdot a'\cdot\eta_\varphi ,$$

$$\frac{1}{r}\cdot g\cdot\zeta_\varphi = c'\cdot\eta_r - \frac{1}{r}\cdot b'\cdot\eta_\varphi, \tag{18}$$

где: $a' = b\cdot\sin 2\varphi + c\cdot\sin^2\varphi + a\cdot\cos^2\varphi,$

$b' = b\cdot\cos 2\varphi + \frac{c-a}{2}\cdot\sin 2\varphi,$

$c' = -b\cdot\sin 2\varphi + c\cdot\cos^2\varphi + a\cdot\sin^2\varphi.$

Имеет место: $b'^2 - a'\cdot c' = b^2 - a\cdot c = g^2 > 0.$

Соотношение (13) превращается в:

$$\zeta(z) = \int_{z_0}^{z}\frac{1}{g}\cdot\left(b'\cdot\eta_r - \frac{1}{r}\cdot a'\cdot\eta_\varphi\right)\cdot dr + \int_{z_0}^{z}\frac{1}{g}\cdot r\cdot\left(c'\cdot\eta_r - \frac{1}{r}\cdot b'\cdot\eta_\varphi\right)\cdot d\varphi. \tag{19}$$

§3. Разностные краевые задачи

Для решения краевой задачи (12) и вычисления основного гомеоморфизма посредством решения (17) удобно воспользоваться методом разностных потенциалов [9]. Основные конструкции метода всюду ниже предполагаются известными.

1. Разностная вспомогательная задача (ВЗ).

Рассмотрим на плоскости z окружность $|z| = R$, целиком лежащую в области $q(z) = 0$. Обозначим r – полярный радиус, $r = |z|$, φ – полярный угол, $\varphi = arg(z)$. В круге $r \le R$ построим равномерную по каждому направлению сетку полярных координат: $\left\{(r_n,\varphi_l)\,\middle|\, n = \overline{0,N},\ l = \overline{0,J-1}\right\}$, $r_{n+1} - r_n = h_r = const$, $h_\varphi = 2\pi/J = const$.

Определим сеточные множества:

$$N^\circ = \left\{(n,l)\,\middle|\, n = \overline{0,N},\ l = \overline{0,J-1}\right\},$$

$$M^\circ = \left\{(n,l)\,\middle|\, n = \overline{1,N-1},\ l = \overline{0,J-1}\right\},$$

и пространства сеточных функций: U_{N° – решения, F_{M° – правые части. На шаблоне 3x3 $Ш_{n,l}$ (если $(n,l)\in M^\circ$, то $Ш_{n,l}\subset N^\circ$) построим аппроксимацию порядка $O(h_r^2 + h_\varphi^2)$ оператора L из (11) (здесь $u_{N^\circ}\in U_{N^\circ}$):

$$L_{M^\circ N^\circ}u_{N^\circ}\big|_{(n,l)} = \sum_{(s,t)\in Ш_{n,l}} a_{s,t}\cdot u_{s,t}\ . \tag{20}$$

Будем считать, что $u_{N^\circ}\in U_{N^\circ}$ тогда и только тогда, когда

$u_{N^\circ}\big|_{r=0} = u_{N^\circ}\big|_{r=R} = 0$ или, что тоже самое:

$$u_{0,l} = u_{N,l} = 0, \quad l = \overline{0,J-1}. \tag{21}$$

К F_{M° будем относить все сеточные функции, определенные на M°. Тогда разностная ВЗ:

$$L_{M^\circ N^\circ}u_{N^\circ} = f_{M^\circ},\ u_{N^\circ}\in U_{N^\circ} \tag{22}$$

имеет единственное решение $\forall f_{M^\circ}\in F_{M^\circ}$.

Общая схема метода разностных потенциалов требует многократного решения ВЗ [9]. Если переменные в операторе (11) разделяются, то примерим метод Фурье, как это сделано в [6] для оператора Лапласа. В более общем случае эффективным может оказаться использование быстросходящегося многосеточного метода типа метода Федоренко [5, 10].

Оператор Грина, дающий решение ВЗ (22), будем обозначать $G_{N^\circ M^\circ}: F_{M^\circ}\longmapsto U_{N^\circ}$.

2. Вычисление основного гомеоморфизма $\chi(z)$.

Пусть окружность $|z| \equiv r = R_1$ с радиусом $R_1 < R$ такова, что при $|z| > R_1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ имеет место $q(z) \equiv 0$, тогда при $r \ge R_1$ $L \equiv \Delta$. Решать задачу (17) будем в круге $r < R_1$, а на его границе следует поставить условия на функцию $\alpha(z)$, эквивалентные возможности однозначно доопределить ее при $r > R_1$ до гармонической функции, ограниченной на бесконечности. Известно [8], что общее ограниченное на бесконечности решение уравнения Лапласа представимо рядом Фурье:

$$\alpha(r,\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\cdot r^{-|k|}\cdot e^{ik\varphi}. \tag{23}$$

Тогда система равенств:

$$|k|\cdot v_k(R_1) + R_1\cdot\frac{dv_k}{dr}(R_1) = 0,\ k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots \tag{24}$$

для функций $v_k(R_1) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\alpha(r,\varphi)\cdot e^{-ik\varphi}\cdot d\varphi$, $k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ представляет собой граничные условия с требуемыми свойствами [9].

Пусть теперь $r = R_1$ – координатная линия сетки с номером n_1. Легко показать [6, 9], что разностными аналогами (24) являются соотношения:

$$v_{k,n_1} = \varkappa_k \cdot v_{k,n_1-1}, \quad \varkappa_k = -\frac{|k|-2n_1-1}{|k|+2n_1+1} \qquad (25)$$

для функций: $v_{k,n} = \frac{1}{J}\cdot\sum_{l=0}^{J-1}\alpha_{n,l}\cdot exp(-ikl h_\varphi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm K$,

где $K = \frac{J-1}{2}$. Пользуясь тем, что $\varkappa_k = \varkappa_{-k}$, перепишем (25):

$$\sum_{l=0}^{J-1}\alpha_{n_1,l}\cdot cos(kl h_\varphi) = \varkappa_k\cdot\sum_{l=0}^{J-1}\alpha_{n_1-1,l}\cdot cos(kl h_\varphi),\ k = 0,1,\ldots K,$$
$$\sum_{l=0}^{J-1}\alpha_{n_1,l}\cdot sin(kl h_\varphi) = \varkappa_k\cdot\sum_{l=0}^{J-1}\alpha_{n_1-1,l}\cdot sin(kl h_\varphi),\ k = 1,2,\ldots K. \qquad (26)$$

Введем обозначения:

$$M^+ = \left\{(n,l)\in M^0 \,\middle|\, r_n < R_1\right\},$$

$$M^- = \left\{(n,l)\in M^0 \,\middle|\, r_n \ge R_1\right\},$$

$$N^- = \bigcup_{(n,l)\in M^-} Ш_{n,l}, \quad N^+ = \bigcup_{(n,l)\in M^+} Ш_{n,l},$$

$$\gamma^+ = M^+\cap N^-, \quad \gamma^- = M^-\cap N^+,$$

$\gamma = \gamma^+\cup\gamma^- = N^+\cap N^-$ – двухслойная сеточная граница.

Очевидно, что: $\gamma^+ = \left\{(n,l) \,\middle|\, n = n_1-1\right\}$,

$$\gamma^- = \left\{(n,l) \,\middle|\, n = n_1\right\}.$$

Пространства решений U_{N^+} и правых частей F_{M^+} введем с помощью операторов сужения области определения $\theta_{N^+N^0}$ и $\theta_{M^+M^0}$:

$$U_{N^+} = \left\{u_{N^+} \,\middle|\, u_{N^+} = \theta_{N^+N^0}u_{N^0},\ u_{N^0}\in U_{N^0}\right\},$$

$$F_{M^+} = \left\{f_{M^+} \,\middle|\, f_{M^+} = \theta_{M^+M^0}f_{M^0},\ f_{M^0}\in F_{M^0}\right\}.$$

Построим операторы: $L_{M^+N^+}: U_{N^+}\longmapsto F_{M^+}$: $L_{M^+N^+}u_{N^+} \overset{def}{=} \theta_{N^+N^0}L_{M^0N^0}u_{N^0}$, где $u_{N^0}\in U_{N^0}$ – произвольная функция, совпадающая на множестве N^+ с u_{N^+}, и $G_{N^+M^+}: F_{M^+}\longmapsto U_{N^+}$: $G_{N^+M^+}f_{M^+} \overset{def}{=} \theta_{N^+N^0}G_{N^0M^0}\theta_{M^0M^+}f_{M^+}$, здесь $\theta_{M^0M^+}$ – оператор доопределения вектор-функции f_{M^+} нулем на множестве $M^- = M^0\setminus M^+$.

В пространство четких следов Ξ_γ включим все сеточные функции, заданные на γ, оператор взятия четкого следа $Tr_{\gamma N^+}: U_{N^+}\longmapsto \Xi_\gamma$ определим как $Tr_{\gamma N^+} \overset{def}{=} \theta_{\gamma N^+}$. Можно показать, что

достаточный критерий четкого разностного следа выполнен [9]. Линейные однородные соотношения (26) (всего их J) можно теперь переписать в операторном (матричном) виде:

$$S_{\gamma^-\gamma}\xi_\gamma = 0_{\gamma^-}. \qquad (27)$$

Здесь $\xi_\gamma\in\Xi_\gamma$ – четкий след разностной функции $\alpha_{N^+}\equiv u_{N^+}$, а $S_{\gamma^-\gamma}$ – матрица $|\gamma^-|\times|\gamma|$, составленная из коэффициентов (26).

Система уравнений (27) и:

$$L_{M^+N^+}u_{N^+} = f_{M^+} \qquad (28)$$

есть дискретный аналог континуальной краевой задачи (12) в ограниченной области $r \le R_1$. Как показано в [9], уравнение (28) равносильно неоднородному граничному уравнению с проектором P_γ:

$$\xi_\gamma = P_\gamma\xi_\gamma + Tr_{\gamma N^+}G_{N^+M^+}f_{M^+}. \qquad (29)$$

Здесь $P_\gamma: \Xi_\gamma\longmapsto\Xi_\gamma$, $P_\gamma\xi_\gamma \overset{def}{=} Tr_{\gamma N^+}(P_{N^+\gamma}\xi_\gamma)$, а оператор $P_{N^+\gamma}$: $\Xi_\gamma\longmapsto U_{N^+}$ определяет разностный потенциал с плотностью из пространства четких следов:

$$v_{N^+} = P_{N^+\gamma}\xi_\gamma \overset{def}{=} P_{N^+N^+}u_{N^+}. \qquad (30)$$

В равенстве (30) $u_{N^+}\in U_{N^+}$ – произвольная сеточная функция, четкий след которой совпадает с ξ_γ: $Tr_{\gamma N^+}u_{N^+} = \xi_\gamma$. В свою очередь $\forall u_{N^+}\in U_{N^+}$ оператор $P_{N^+N^+}$ определяется равенством:

$$P_{N^+N^+}u_{N^+} \equiv u_{N^+} - G_{N^+M^+}L_{M^+N^+}u_{N^+}. \qquad (31)$$

Разностный потенциал (30) не зависит от значений u_{N^+} на множестве $N^+\setminus\gamma$ и если $v_{N^+}\in U_{N^+}$ и $L_{M^+N^+}v_{N^+} = f_{M^+}$, $f_{M^+}\in F_{M^+}$, $Tr_{\gamma N^+}v_{N^+} = \xi_\gamma$, то:

$$v_{N^+} = P_{N^+\gamma}\xi_\gamma + G_{N^+M^+}f_{M^+}. \qquad (32)$$

Последнее соотношение есть обобщенная разностная формула Грина [9].

В силу эквивалентности (28) ⇔ (29) можно заменить краевую задачу (27), (28) системой уравнений для определения неизвестной плотности потенциала $\xi_\gamma\in\Xi_\gamma$ (27), (29). Решив последнюю, мы получим разностную функцию $\alpha(r_n,\varphi_l)$ с помощью (32).

Задача (27), (29) есть переопределенная система линейных уравнений, обобщенное решение которой доставляет минимум функционалу:

$$\| Q_\gamma\xi_\gamma - Tr_{\gamma N^+}G_{N+M^+}f_{M^+}\|^2_{\Xi_\gamma} + \| S_{\gamma-\gamma}\xi_\gamma\|^2_{\Xi_{\gamma-}} \longmapsto min, \qquad (33)$$

здесь $Q_\gamma = I_\gamma - P_\gamma$. Классическое решение (27), (29) обращает (33) в нуль. Нормы в (33) следует выбирать таким образом, чтобы операторы Q_γ и $S_{\gamma-\gamma}$ были ограничены. В [9, ч.III, гл.3] приведены оценки, следующие из теорем о следах, согласно которым $\|\cdot\|_{\Xi_\gamma}$ можно выбрать как дискретный аналог соболевской нормы W^1_2, а $\|\cdot\|_{\Xi_{\gamma-}}$ - как гильбертову норму l_2. Явное выражение оператора A_γ: $\|\xi_\gamma\|^2_{\Xi_\gamma} = (A_\gamma\xi_\gamma,\xi_\gamma)$ выписано в [6].

Уравнения Лагранжа-Эйлера для вариационной задачи (33) имеют вид:

$$K_\gamma\xi_\gamma \equiv (Q^*_\gamma A_\gamma Q_\gamma + S^*_{\gamma-\gamma}S_{\gamma-\gamma})\xi_\gamma = \bar\varphi_\gamma, \qquad (34)$$

где $\bar\varphi_\gamma = Q^*_\gamma A_\gamma Tr_{\gamma N^+}G_{N+M^+}f_{M^+}$,

символом "*" обозначены сопряженные операторы. Можно показать [9], что равносильная (34) система $A^{-1}_\gamma K_\gamma\xi_\gamma = A^{-1}_\gamma\bar\varphi_\gamma$ обладает лучшими свойствами обусловленности, для определения ξ_γ ее можно решать итерациями или прямым методом (в последнем случае все операторы следует насчитать в виде матриц).

После применения (32) к решению (34) мнимая часть $\beta(r,\varphi)$ основного гомеоморфизма $\chi(z)$ находится по формулам разностного интегрирования, соответствующим (18), (19):

$$g_{n,l+1/2}\cdot\frac{\beta_{n+1/2,l+1/2}-\beta_{n-1/2,l+1/2}}{h_r} = \qquad (35а)$$

$$= b'_{n,l+1/2}\cdot\frac{\alpha_{n+1/2,l+1/2}-\alpha_{n-1/2,l+1/2}}{h_r} -$$

$$- \frac{1}{r_n}\cdot a'_{n,l+1/2}\cdot\frac{\alpha_{n,l+1}-\alpha_{n,l}}{h_\varphi},$$

$$g_{n-1/2,l}\cdot\frac{\beta_{n-1/2,l+1/2}-\beta_{n-1/2,l-1/2}}{h_\varphi} = \qquad (35б)$$

$$= r_{n-1/2}\cdot c'_{n-1/2,l}\cdot\frac{\alpha_{n,l}-\alpha_{n-1,l}}{h_r} -$$

$$- b'_{n-1/2,l}\cdot\frac{\alpha_{n-1/2,l+1/2}-\alpha_{n-1/2,l-1/2}}{h_\varphi}.$$

Значения известных функций в "полуцелых" узлах предварительно находятся с помощью интерполяции. Порядок

определения значений $\beta(z)$ в узлах "полуцелой" сетки с помощью (35а,б) и прием, позволяющий добиться выполнения условия $\beta(z) \longmapsto 0$ при $z \longmapsto \infty$, подробно описаны в [6, §3]. Однозначность обеспечивается односвязностью области через бесконечность. Основной гомеоморфизм на сетке определяется с помощью формулы (15).

3. Решение внешней задачи

ищется на множестве $\mathbb{D}_{ex}\cap\left\{r < R_1\right\}$. Вспомогательная задача та же, что описана в пункте 1. При $r = R_1$ ставятся условия (26). Конструкция сеточных множеств другая:

$$M^+ = \left\{(n,l)\in M^0 \,\middle|\, (r_n,\varphi_l)\in\mathbb{D}_{ex},\ r < R_1\right\},$$

$$M^- = M^0\setminus M^+,$$

$$N^- = \bigcup_{(n,l)\in M^-}Ш_{n,l},\quad N^+ = \bigcup_{(n,l)\in M^+}Ш_{n,l},$$

$$\gamma^+ = M^+\cap N^-,\ \gamma^- = M^-\cap N^+,\ \gamma = \gamma^+\cup\gamma^-$$

Таким образом теперь двухслойная сеточная граница γ состоит из двух "контуров" - около кривой Γ и около окружности $r = R_1$, обозначим их γ_1 и γ_2 соответственно.

Формальные определения пространств U_{N^+}, F_{M^+}, операторов L_{M+N^+}, G_{N+M^+}, $Tr_{\gamma N^+}$, P_{N+N^+}, $P_{N+\gamma}$, P_γ, Q_γ - такие же, как в пункте 2.

Континуальная краевая задача (12) заменяется разностной:

$$L_{M+N^+}u_{N^+} = 0_{M^+},$$
$$l_{\omega N^+}u_{N^+} = \varphi_\omega, \qquad (36)$$
$$S_{\gamma_2^-\gamma_2}u_{\gamma_2} = 0_{\gamma_2^-}.$$

$l_{\omega N^+}$ в (36) - оператор интерполяции (локальный), ω - множество опорных точек на кривой Γ, $\varphi_\omega\in\Phi_\omega$ - известная сеточная функция, $\varphi_\omega = -ln|\chi(z)|\Big|_{z\in\omega}$. От (36) переходим к задаче:

$$\xi_\gamma = P_\gamma\xi_\gamma,$$
$$l_{\omega N^+}P_{N+\gamma}\xi_\gamma = \varphi_\omega, \qquad (37)$$
$$S_{\gamma_2^-\gamma_2}\xi_{\gamma_2} = 0_{\gamma_2^-}.$$

Отметим, что условие первого рода на кривой Γ можно аппроксимировать и другим способом, например, вместо неизвестных ξ_{γ_1} рассмотреть неизвестные значения нормальной производной решения в точках ω [9].

Обобщенное решение (37) мимнимизирует функционал:

$$\| Q_\gamma \xi_\gamma \|^2_{\Xi_\gamma} + \| l_{\omega\gamma}\xi_\gamma - \varphi_\omega \|^2_{\Phi_\omega} + \| S_{\gamma_2^- \gamma}\xi_\gamma \|^2_{\Xi_{\gamma_2^-}} \longmapsto min. \qquad (38)$$

В (38) $l_{\omega\gamma} \equiv l_{\omega N+} P_{N+\gamma}$; $S_{\gamma_2^-\gamma}\xi_\gamma \overset{def}{=} S_{\gamma_2^-\gamma_2}\theta_{\gamma_2\gamma}\xi_\gamma$, а $S_{\gamma_2^-\gamma_2}$ – тот же оператор, что обозначен $S_{\gamma^-\gamma}$ в предыдущем пункте; $\|\xi_\gamma\|^2_{\Xi_\gamma} = (A_\gamma\xi_\gamma, \xi_\gamma) = (A_{\gamma_1}\xi_{\gamma_1}, \xi_{\gamma_1}) + (A_{\gamma_2}\xi_{\gamma_2}, \xi_{\gamma_2})$; $\|\varphi_\omega\|^2_{\Phi_\omega} = (B_\omega\varphi_\omega, \varphi_\omega)$; $\|\xi_{\gamma_2^-}\|^2_{\Xi_{\gamma_2^-}} = (\xi_{\gamma_2^-}, \xi_{\gamma_2^-})$. Здесь скобками обозначено обычное скалярное произведение, $A_{\gamma_2} = A^*_{\gamma_2} > 0$ – это оператор A_γ из пункта 2, $A_{\gamma_1} = A^*_{\gamma_1} > 0$ – его аналог для γ_1, $B_\omega = B^*_\omega > 0$ – задает в Φ_ω дискретный аналог соболевской нормы W^1_2, выражения для коэффициентов B_ω выписаны в [6]. Разностная формула Грина упрощается по сравнению с (32):

$$v_{N+} = P_{N+\gamma}\xi_\gamma. \qquad (39)$$

Всякая функция, минимизирующая (38), есть решение системы:

$$K_\gamma\xi_\gamma \equiv (Q^*_\gamma A_\gamma Q_\gamma + l^*_{\omega\gamma} B_\omega l_{\omega\gamma} + S^*_{\gamma_2^-\gamma} S_{\gamma_2^-\gamma})\xi_\gamma = \bar\varphi_\gamma, \qquad (40)$$

где $\bar\varphi_\gamma = l^*_{\omega\gamma} B_\omega \varphi_\omega$.

Разностная функция $\eta(r_n, \varphi_1)$ получается с помощью (39) из решения (40), после чего ζ восстанавливается точно также, как это описано в пункте 2 (см. также [6]), искомое отображение дается формулой (8).

4. Решение внутренней задачи.

Здесь требуется найти функцию η, удовлетворяющую (11) в $\mathbb{D}_{in}$ с заданными значениями на Г. После вычисления основного гомеоморфизма рассмотрим другую постановку разностной ВЗ, отличающуюся от (20), (21), (22) только отсутствием требования $u_{N^\circ}\big|_{r=0} = 0$. Решение этой задачи также можно искать многосеточным методом. Все остальные построения аналогичны пункту 3 с тем упрощением, что конструкции, связанные с учетом асимптотики на бесконечности, отсутствуют.

§4. Приложение к построению сеток

Отображение криволинейной поверхности на евклидову плоскость, сохраняющее углы, может быть использовано для

построения на поверхности некоторой сетки, то есть двух семейств кривых, пересекающихся под заданными углами, в частности, сетка может быть ортогональной. Выбирая третью координату по направлению нормали, мы получим вблизи поверхности так называемую систему локально-моноклинных координат [11]. Они используются для расчетов трехмерных пограничных слоев около криволинейной поверхности [11].

В рассмотренном случае отображение внешности области может быть использовано для построения сетки на поверхности вне некоторой конфигурации, например, на фюзеляже вокруг киля или на крыле вокруг пилона. Внутренняя задача позволяет строить сетки на ограниченных телах, например, на кабине или кузове автомобиля. При этом для записи уравнений динамики жидкости в локально-моноклинных координатах требуется информацмя также и о свойствах второй квадратичной формы поверхности [11].

§5. Заключение

В работе сформулированны краевые задачи для построения квазиконформных отображений односвязных ограниченных и неограниченных областей, указан конструктивный способ вычисления основного гомеоморфизма системы уравнений Бельтрами. Рассмотренные задачи являются обобщением задач для системы уравнений Коши-Римана. Предложен также численный алгоритм отыскания отображений, основанный на методе разностных потенциалов.

Авторы благодарят профессора В.С.Рябенького за помощь и поддержку.

Литература.

1. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1966.

2. Л. Берс. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.

3. Б. В. Боярский. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. Мат. сб. Том 43(85), вып.3, 1957.

4. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. М., Наука, 1988.

5. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Разностные схемы. Введение в теорию. М., Наука, 1973.

6. Д. С. Каменецкий, С. В. Цынков. Вычислительная генерация конформных сеток во внешности ограниченной односвязной области на основе метода разностных потенциалов. Препинт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР # 61 за 1990 год.

7. С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М., Наука, 1987.

8. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Гостехтеориздат, 1953.

9. В. С. Рябенький. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. М., Наука, 1987.

10. Р. П. Федоренко. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. УМН, Том 28, вып.2, 1973.

11. Э. Хиршель, В. Кордулла. Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. Численный расчет пограничного слоя. М., Мир, 1987.

12. Б. В. Шабат. ВВедение в комплексный анализ. Том 1. М., Наука, 1985.