

ОРЛЕНА ДЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕДЛИЦА АН СССР

Д. С. Каменицкий, С. В. Ильков

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОНФОРМНЫХ СЕТОК
ВО ВНЕШНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА РАЗНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Москва, 1990 г.

Аннотация

В работе рассматривается задача построения конформного отображения внешности односвязной ограниченной области на внешность единичного круга, решение которой используется для генерации криволинейной сетки. Задача о конформном отображении сводится к внешней задаче Дирихле для уравнения Лапласа, которая решается численно методом разностных потенциалов [1]. Используемый метод позволяет издежать аппроксимации сингулярных интегралов и точно учесть граничные условия на контуре и на бесконечности. Приведены примеры, в том числе для невыпуклой области и области с негладкой границей.

Abstract

In this paper the problem of conformal mapping of the exterior of a given simply-connected restricted domain onto the exterior of the unit circle is considered. The solution of this problem is used for the curvilinear grid generation. The problem of mapping is equivalent to the external Dirichlet problem for Laplace equation. Method of difference potentials which allows to take into account exactly boundary conditions on the contour and at infinity is applied for the solution of Dirichlet problem. In the same time this method doesn't require the approximation of singular integrals. Some examples are given, including the case of non-convex domain and the domain with non-smooth bound.

§1. Постановка задачи о конформном отображении

Пусть D_{1n} - ограниченная односвязная область, $D_{1n} \subset C$, C - расширенная комплексная плоскость. Рассмотрим задачу об отображении конформного отображения неограниченной односвязной области $D_{ex} = C \setminus D_{1n}$ на внешность единичного круга. (D_{ex} односвязна, т.к. содержит точку $z = \infty$.) Согласно теореме Римана, такое отображение существует и определяется единственным образом при задании трех вещественных параметров [2], например, если для выбранной точки $z_0 \in D_{ex}$ указан образ $w_0 \in \text{Int} D_{ex} = \{w \mid |w| < 1\}$ и

для нее же определено значение аргумента произвольной функции $w = w(z)$: $\arg \frac{dw}{dz} \Big|_{z=z_0} = \alpha_0$. Потребуем, чтобы бесконечно удаленная точка плоскости z переходила в бесконечно удаленную точку плоскости w , т.е. $z_0 = \infty$ и $w_0 = \infty$, на выдоре третьего вещественного параметра $\alpha_0 = \arg w'(z) \Big|_{z=\infty}$ останемся ниже.

При данных условиях искомого конформное отображение осуществляется аналитической в D_{ex} функцией $w(z)$, имеющей в точке $z = \infty$ простой полюс. Поэтому можно написать:

$$w(z) = \exp(\ln z + \psi(z)) = z \cdot e^{\psi(z)}, \quad (1)$$

где

$$\psi(z) = \eta(\Gamma, \varphi) + i \cdot \zeta(\Gamma, \varphi) \quad (2)$$

- голоморфная в D_{ex} функция и, следовательно, вещественнозначная функция $\eta(\Gamma, \varphi)$ и $\zeta(\Gamma, \varphi)$, связанные условиями Коши-Римана:

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}. \quad (3)$$

являются гармоническими и ограниченными в D_{ex} . В том числе и при $z \rightarrow \infty$. Здесь (Γ, φ) - полярные координаты на плоскости комплексного переменного z , начало координат лежит в D_{1n} . $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Граница $\partial D_{1n} = \partial D_{ex} = \Gamma$ переходит в окружность $|w| = 1$, поэтому имеет место:

$$|w(z)| \Big|_{z \in \Gamma} = |\exp(\ln z + \psi(z))| \Big|_{z \in \Gamma} = \exp(\ln r + \eta(z)) \Big|_{z \in \Gamma} = 1.$$

Отсюда находим, что

$$\eta(z) \Big|_{z \in \Gamma} = -\ln r. \quad (4)$$

Таким образом для гармонической функции $\eta(z) = \eta(\Gamma, \varphi)$ сформулирована внешняя краевая задача первого рода, а именно:

$$\Delta \gamma \equiv \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right] + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0, \quad (\gamma, \varphi) \in D_{\text{ex}},$$

$$\eta(\gamma, \varphi) \Big|_{(\gamma, \varphi) \in \Gamma} = -l \eta, \quad (5)$$

Эта задача, как известно, имеет единственное решение, а сопряженная функция $\{(\gamma, \varphi)\}$ может быть восстановлена с точностью до константы по формуле:

$$\{(\gamma, \varphi)\} = \int_{z_0}^z \gamma \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz - \frac{1}{z} \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (6)$$

Заметим, что в односвязной области D_{ex} все непрерывные пути, соединяющие произвольно выбранную начальную точку z_0 и текущую точку z , тождественны ([2], стр. 95), поэтому значение интеграла (6) зависит только от верхнего и нижнего пределов и определяется с точностью до аддитивной постоянной. Выбор фиксированной постоянной интегрирования в (6), однозначно определенная функция $\{(\gamma, \varphi)\}$, осуществляется путем задания третьего вещественного параметра конформного отображения. Действительно, лорановское разложение для $\psi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид: $\psi(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$.

Поставим $\psi'(z) = -\frac{c_1}{z^2} - 2 \cdot \frac{c_2}{z^3} + \dots$, откуда получаем:

$$z \cdot \psi'(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \text{ посколькучу:}$$

$$\psi'(z) = z \cdot \psi'(z) \cdot e^{\psi(z)} + e^{\psi(z)} \rightarrow \psi'(z), \quad z \rightarrow \infty, \text{ то:} \quad (7)$$

$a_0 = \alpha \gamma \psi'(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \{(\gamma, \varphi)\} \Big|_{z \rightarrow \infty}$.
 Задавая a_0 мы задаем значение функции $\{(\gamma, \varphi)\}$ в некоторой внутренней точке области D_{ex} (а именно, в точке $z = \infty$) и тем самым определяем аддитивную постоянную в (6).
 Далее при решении задачи положим:

$$\{(\gamma, \varphi)\} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Известно [1], что общее ограниченное на бесконечности решение уравнения Лапласа представимо рядом Фурье:

$$\{(\gamma, \varphi)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot r^{-|k|} \cdot e^{ik\varphi}, \quad (9)$$

поэтому условие (8) эквивалентно равенству:

$$\int_0^{2\pi} \{(\gamma, \varphi)\} d\varphi = 0, \quad (10)$$

где R_1 - радиус некоторой окружности с центром в $z = 0$, внутри которой целиком лежит $D_{1,n}$.

§2. Численное решение внешней задачи Дирихле

Решение задачи (5) представляет собой поверхность логарифмический потенциал с плотностью, заданной на Γ . Для неизвестной плотности может быть выписано и решено численно интегральное уравнение, как это сделано, например, в [3]. Преимущество такого подхода состоит в автоматическом учете поведения решения на бесконечности, трудности реализации - в необходимости аппроксимировать сингулярный интеграл. Непосредственное решение разностного уравнения Лапласа (как линейной системы) в некоторой конечной подобласти D_{ex} в данном случае неэффективно, поскольку не обеспечивает перехода условия $|\eta(\gamma, \varphi)| \leq \text{const}$, $\gamma \rightarrow \infty$ на выбранную внешнюю границу, и, кроме того, если Γ не совпадает с координатными линиями, то затруднительно также точное построение разностного аналога условия (4).

В данной работе для численного решения задачи (5) применен метод разностных потенциалов (МРП) [1], позволивший избежать аппроксимации сингулярных интегралов и точно учесть граничные условия на контуре и на бесконечности. Ниже описана использованная вычислительная процедура в соответствии с общей схемой решения разностных краевых задач при помощи МРП ([1], часть III, гл. 3), все рассматриваемые пространства функции и операторы - линейные.

Рассмотрим кольцо $R_0 < \Gamma < R_1$ и введем в нем разностную сетку полярных координат: $\{(\gamma_n, \varphi_1) \mid n = n_0 \cdot n_1, n_0 > 0, 1 = 0, j=1\}$,

$\gamma_n = (n + \frac{1}{2}) \cdot \gamma_1$, $\varphi_1 = (R_1 - R_0) / (n_1 - n_0)$, $\varphi_1 = 1 \cdot \varphi$, $\varphi_0 = 2\pi / j$.
 Радиусы R_0 и R_1 выбираются таким образом, чтобы меньшая окружность целиком лежала внутри $D_{1,n}$, а большая - охватывала $D_{1,n}$. При этом следует учитывать, что решение η и, следовательно, конформная сетка дуги построены в области

$$D^- = D_{\text{ex}} \cap \{(\gamma, \varphi) \mid R_0 < \gamma < R_1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Определим сеточные множества:

$$N^0 = \{(n, l) \mid n = \bar{n}_0, \bar{n}_1, 1 = 0, j, j-1\},$$

$$M^0 = \{(n, l) \mid n = \bar{n}_0 + 1, \bar{n}_1 - 1, 1 = 0, j, j-1\},$$

пространства сеточных функций U_{N^0} и F_{M^0} и разностный оператор

Лангаса: $L_{M^0 N^0}: U_{N^0} \rightarrow F_{M^0}$:

$$L_{M^0 N^0} u_{N^0} \Big|_{(n,l)} = \frac{1}{h^2} \frac{\Gamma_{n+1/2} (u_{n+1, l} - u_{n, l}) - \Gamma_{n-1/2} (u_{n, l} - u_{n-1, l})}{\Gamma_n} + \frac{1}{h^2} \frac{u_{n, l+1} - 2u_{n, l} + u_{n, l-1}}{h^2} = \sum_{(s,t) \in \mathbb{Z}^2} a_{s,t} \cdot u_{s,t}. \quad (11)$$

где $U_{N^0} \in U_{N^0}$, \mathbb{Z}^2 - пятугольный шаблон "прямой крест" с центром в узле (n, l) , $\mathbb{Z}^2 \subset N^0$ (Γ_n - $(n, l) \in N^0$).

Как показано в [1], ч. III, тл. 2, §2, в силу того, что таржоническая ограниченная область D^- является выпуклой функцией $\eta(\gamma, \varphi)$ предсталима рядом (9), выполнены равенства:

$$|k| \cdot \gamma_k(R_1) + R_1 \frac{d\gamma_k}{dR_1}(R_1) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

Для ее коэффициентов формулы: $\gamma_k(R_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\gamma, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi$.

Для ее коэффициентов эквивалентно возможности однозначно определить решение задачи $\Delta u = 0$ с условиями (4), (12), построенное в ограниченной области D^- , до решения задачи (5) в неограниченной области D_{ex} . Таким образом соотношения (12) позволяют перенести краевые условия с бесконечности на окружность $\gamma = R_1$. Построим теперь разностные аналоги (12):

$$\gamma_{k,n} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \eta_{n,l} \cdot \exp(-iklh\varphi),$$

$$|k| \cdot \frac{\gamma_{k,n+1} + \gamma_{k,n-1}}{2} + \frac{\gamma_{k,n} - \gamma_{k,n-1}}{h^2} R_1 = 0, \quad (13)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K, \quad K = \frac{j-1}{2}.$$

В наложении следующие условия на функции из U_{N^0} : сеточная функция U_{N^0} принадлежит U_{N^0} тогда и только тогда, когда для U_{N^0} выполняется (13) и, кроме того,

$$U_{N^0} \Big|_{\gamma=R_0} = 0 \neq U_{n,l} = 0, \quad 1 = 0, 1, \dots, j-1. \quad (14)$$

двухточечную краевую задачу для обобщенного разностного уравнения второго порядка:

$$A_n \cdot \gamma_{k,n-1} - C_{k,n} \cdot \gamma_{k,n} + B_n \cdot \gamma_{k,n+1} = F_{k,n}, \quad n = \bar{n}_0 + 1, \bar{n}_1 - 1, \gamma_{k,n_0} = 0, \quad \gamma_{k,n_1} = \star \cdot \gamma_{k,n_1-1}, \quad \text{где } A_n = \frac{n}{(n-2)h^2}, \quad B_n = \frac{n+1}{(n+2)h^2},$$

$$C_{k,n} = \frac{4\sin^2(kh\varphi/2)}{(n+2)h^2} + \frac{2}{h^2}, \quad \star = -\frac{|k| - 2n_1 - 1}{|k| + 2n_1 + 1}. \quad (18)$$

$$F_{k,n} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \gamma_{n,l} \cdot \exp(-iklh\varphi).$$

(18) имеет единственное решение $\forall k = 0, \pm 1, \dots, \pm K$, оно может быть найдено прогонкой, так как $|C_{k,n}| \geq |A_n| + |B_n|$ и $|\star| \leq 1$, см. [4].

Тем самым определен оператор Грина разностной ВЗ: $G_{N^0 M^0}: F_{M^0} \rightarrow U_{N^0}$, и можно построить оператор $G_{N^0 M^0}: F_{M^0} \rightarrow U_{N^0}$, который для произвольной $f_{M^0} \in F_{M^0}$ дает:

$$U_{N^0} = G_{N^0 M^0} f_{M^0} = \theta_{N^0 M^0} \theta_{M^0 N^0} f_{M^0}. \quad (19)$$

Здесь $\theta_{N^0 M^0}$ - оператор доопределения вектор-функции f_{M^0} нулем на множестве $M^0 \setminus N^0$. Следуя [1], ч. II, тл. 2, введем оператор:

$$P_{N^0 M^0} U_{N^0} = U_{N^0} - \theta_{N^0 M^0} \theta_{M^0 N^0} U_{N^0}, \quad U_{N^0} \in U_{N^0}. \quad (20)$$

пространство четких следов \mathcal{E}_γ , включающее все сеточные функции, заданные на γ , и оператор взятия четкого следа: $\text{Tr}_{N^0} U_{N^0} \rightarrow \mathcal{E}_\gamma$, $\text{Tr}_{N^0} \text{def} \theta_{N^0 M^0}$. Можно показать, что пара $(\mathcal{E}_\gamma, \text{Tr}_{N^0})$ удовлетворяет достаточному критерию четкого следа (11), стр. 124).

Разностный потенциал с плотностью из пространства четких следов $f_\gamma \in \mathcal{E}_\gamma$, определяемый равенством:

$$\gamma_{N^0} = P_{N^0 M^0} \text{def} P_{M^0 N^0} \gamma_{N^0}. \quad (21)$$

где $U_{N^0} \in U_{N^0}$ и $\text{Tr}_{N^0} U_{N^0} = f_\gamma$, не зависит от значений U_{N^0} на множестве $N^0 \setminus \gamma$ и обладает следующими свойствами ([1], ч. II, тл. 2):

$$L_{N^0 M^0} \gamma_{N^0} = 0_{M^0} \quad (22)$$

и если для $U_{N^0} \in U_{N^0}$ имеет место $L_{N^0 M^0} U_{N^0} = 0_{M^0}$ и $\text{Tr}_{N^0} U_{N^0} = f_\gamma$, то

будем считать, что в пространство F^m входят все сеточные функции, заданные на M^0 . Легко проверить (см. ниже), что разностная вспомогательная задача (B3):

$$L_{M^0} U_{M^0} = f_{M^0}, \quad U_{M^0} \in U_{M^0} \quad (15)$$

имеет единственное решение $U_{M^0} \in F^m$.

Обозначим:

$$M^- = \{(n, 1) \in M^0 \mid (r_n, \rho_1) \in D_{ex}\},$$

$$M^+ = \{(n, 1) \in M^0 \mid (r_n, \rho_1) \in D_{in}\},$$

$$N^- = \bigcup_{(n, 1) \in M^-} M_{n, 1}^{III}, \quad N^+ = \bigcup_{(n, 1) \in M^+} M_{n, 1}^{III},$$

$$N^- = M^+ \cap N^-, \quad N^+ = M^- \cap N^+.$$

Множество $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- = N^+ \cap N^-$ назовем дуэльной сеточной границей.

Рассмотрим пространство сеточных функций:

$$U_{M^0} = \{U_{M^0} \mid U_{M^0} = \theta_{N^+ N^0} U_{N^0}, \quad U_{N^0} \in U_{N^0}\},$$

$$F_{M^0} = \{f_{M^0} \mid f_{M^0} = \theta_{N^+ N^0} f_{N^0}, \quad f_{N^0} \in F_{N^0}\},$$

где $\theta_{N^+ N^0}$ и $\theta_{N^- N^0}$ - операторы сужения области определения и введен оператор $L_{M^0 N^0}: U_{M^0} \rightarrow F_{M^0}$; $L_{M^0 N^0} U_{M^0} = \text{def } \theta_{N^+ N^0} L_{N^0} U_{N^0}$, где $U_{N^0} \in U_{N^0}$ - произвольная функция, совпадающая на множестве N^- с U_{M^0} . Тогда задача:

$$L_{M^0 N^0} U_{M^0} = 0_{M^0}, \quad U_{M^0} \in U_{M^0} \quad (16)$$

выдвигает разностным аналогом краевой задачи (5). Вторая система уравнений в (16) соответствует (4); здесь φ - множество опорных точек на Γ , $L_{M^0 N^0}$ - локальный оператор линейной интерполяции, определяющий значения функции в точке из φ по значениям в нескольких соседних точках из N^- (с точностью по крайней мере не хуже $O(\tau^2)$) - порядка аппроксимации в (11)), $\varphi_q \in \varphi_q$ - пространство правых частей.

Решение B3 (15) имеет в виде конечного ряда Фурье:

$$U_{M^0} \equiv U_{n, 1} = \sum_{k=-K}^{K} Y_{k, n} \cdot \exp(k \ln \rho_1) \quad (17)$$

при этом на каждой гармонике в силу условий (13), (14) получим

$$U_{M^0} = P_{N^+} \gamma^+ \gamma^- \quad (23)$$

формула (23) выражает решение разностного уравнения Лапласа $U_{M^0} \in U_{M^0}$ через его значения на множестве γ .

Определим оператор $P_{\gamma^+ \gamma^-}: \gamma^+ \rightarrow \gamma^-$, $P_{\gamma^+ \gamma^-} \text{def } \Gamma_{\gamma^+} (P_{N^+} \gamma^+ \gamma^-)$, обладающий свойством $P_{\gamma^+ \gamma^-}^2 = P_{\gamma^+ \gamma^-}$. Как показано в [11], задача (16) эквивалентна системе граничных уравнений с проектором:

$$P_{\gamma^+ \gamma^-} \gamma^+ = \xi_{\gamma^+}, \quad I_{\gamma^+ N^+} (P_{N^+} \gamma^+ \gamma^-) = \varphi_q \quad (24)$$

решение (16) восстанавливается по решению (24) с помощью формулы (23). При этом имеет место устойчивость по правой части. Если количество опорных точек в множестве φ достаточно велико, то задача (24) представляет собой переопределенную систему линейных уравнений, под обоим решением которой понимается то решение уравнения $\xi_{\gamma^+} - P_{\gamma^+ \gamma^-} \gamma^+ = 0$, которое доставляет наименьшее значение функционалу $\|I_{\gamma^+ N^+} (P_{N^+} \gamma^+ \gamma^-) - \varphi_q\|_{\varphi_q}^2$; норма в пространстве правых частей φ_q вводится посредством скалярного произведения:

$$\| \varphi_q \|_{\varphi_q}^2 = (B_{\varphi_q, \varphi_q} \varphi_q, \varphi_q) \quad (25)$$

где $B_{\varphi_q, \varphi_q}: \varphi_q \rightarrow \varphi_q$ - самосопряженный положительно определенный оператор:

$$B_{\varphi_q, \varphi_q} |l = \frac{1}{|q|} \left[\varphi_{q_1} - \frac{\varphi_{q_{1+1}} - \varphi_{q_1}}{\rho_{1, 1+1}^2} - \frac{\varphi_{q_{1-1}} - \varphi_{q_1}}{\rho_{1, 1-1}^2} \right] \quad (26)$$

здесь l - индекс, нумерующий точки множества φ , $|q|$ - общее количество опорных точек, $\rho_{1, 1+1}$, $\rho_{1, 1-1}$ - расстояния между соседними опорными точками. Воспользовавшись (26), получим:

$$\| \varphi_q \|_{\varphi_q}^2 = \frac{1}{|q|} \sum_{i=1}^q \left[\varphi_{q_i}^2 + \frac{[\varphi_{q_{i+1}} - \varphi_{q_i}]^2}{\rho_{i, i+1}^2} + \frac{[\varphi_{q_{i-1}} - \varphi_{q_i}]^2}{\rho_{i, i-1}^2} \right] \quad (27)$$

Норма (27), представляющая собой сумму квадратов значений функции и ее первых разностных отношений, есть конкретный аналог содолявской нормы $\| \varphi_q \|_2$ в пространстве скалярных функций, заданных на кривой Γ .

Введем также норму, аналогичную (27), в пространстве ξ_{γ^+} :

$$\| \xi_{\gamma^+} \|_{\xi_{\gamma^+}}^2 = (A_{\xi_{\gamma^+}, \xi_{\gamma^+}} \xi_{\gamma^+}, \xi_{\gamma^+}) \quad (28)$$

где $A_{\xi_{\gamma^+}, \xi_{\gamma^+}}: \xi_{\gamma^+} \rightarrow \xi_{\gamma^+}$ - самосопряженный положительно определенный оператор:

$$A_{\gamma}^{\gamma} \chi_j |_{\gamma} = \frac{1}{17} \left[\chi_j - \sum_{j' \in \gamma \cap \Pi_j^{\gamma}} \frac{\chi_{j'} - \chi_j}{\rho_{j', j}} \right]. \quad (29)$$

тогда:

$$\| \chi_{\gamma} \|_{E_{\gamma}}^2 = \frac{1}{17} \sum_j \left[\chi_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j' \in \gamma \cap \Pi_j^{\gamma}} \frac{(\chi_{j'} - \chi_j)^2}{\rho_{j', j}} \right]. \quad (30)$$

Как показано в [1], ч. III, гл. 3, вариационная задача:

$$\| \chi_{\gamma} \|_{E_{\gamma}}^2 - \varphi_q \| \chi_{\gamma} \|_{E_{\gamma}}^2 \rightarrow \min, \quad Q_{\gamma} \chi_{\gamma} = 0, \quad (31)$$

где $1_{q\gamma} = 1_{qN} P^{-1} \gamma^{-1}$, $Q_{\gamma} = 1_{\gamma} - P_{\gamma}$, сводится к задаче:

$$\| Q_{\gamma} \chi_{\gamma} \|_{E_{\gamma}}^2 + \| 1_{q\gamma} P_{\gamma} \chi_{\gamma} - \varphi_q \|_{E_{\gamma}}^2 \rightarrow \min, \quad (32)$$

каждое решение которой является решением линейной системы:

$$K_{\gamma} \chi_{\gamma} = (Q_{\gamma}^* A_{\gamma} Q_{\gamma} + P_{\gamma}^* 1_{q\gamma}^* V 1_{q\gamma} P_{\gamma}) \chi_{\gamma} = \tilde{b}_{\gamma}. \quad (33)$$

или эквивалентной (33) системы:

$$A_{\gamma}^{-1} K_{\gamma} \chi_{\gamma} = A_{\gamma}^{-1} \tilde{b}_{\gamma}. \quad (34)$$

Символом "*" обозначены сопряженные операторы (транспонированные матрицы).

Если оператор интерполяции 1_{qN} таков, что использует значения функции χ_N только на множестве $\gamma \subset N$, то:

$$1_{q\gamma} = 1_{qN} P^{-1} N^{-1} \gamma^{-1} = 1_{qN} \theta_{N-\gamma} T_{\gamma}^{-1} P^{-1} N^{-1} \gamma^{-1} = 1_{qN} \theta_{N-\gamma} \gamma^{-1} P^{-1}.$$

$$\text{Поэтому: } 1_{q\gamma} P_{\gamma} = 1_{qN} \theta_{N-\gamma} \gamma^{-1} P_{\gamma}^2 = 1_{qN} \theta_{N-\gamma} \gamma^{-1} P_{\gamma}.$$

Этим упрощением воспользуемся при вычислении K_{γ} по формуле (33). Интерполяция с точностью $O(h^2)$ для каждого узла из q осуществляется оператором 1_{qN} по трем (или четырем) ближайшим точкам N , обязательно лежащим в γ (это следует непосредственно из конструкции сеточной трайанга).

Система (34) решается методом сопряженных градиентов [1, 4]. Квадратные матрицы операторов P_{γ} и Q_{γ} насчитываются в ортонормированном базисе пространства E_{γ} . В [1] приводятся оценки числа обусловленности оператора $A_{\gamma}^{-1} K_{\gamma}$, обеспечивающие при использовании норм (27), (30) сходимость итерационного процесса и медленный рост числа итераций при $h \rightarrow 0$.

После определения плотности потенциала χ_{γ} для $\varphi_q = -\text{Div} \chi_{\gamma}$

(см. (4)), решение $\eta_{n,1}$ строится на множестве N с помощью формулы (23).

§3. Восстановление сопряженной функции и построение конформной сетки

Расчет значений разностной функции ζ производится по схеме аппроксимировавшей систему Коши-Римана (3). Для достижения порядка $O(h^2)$ функция ζ определяется в "полуплоскостях" углах (т.е. в серединах ячеек) полярной сетки, аналогично тому, как это сделано в [8]. Разностная схема для (3) имеет вид:

$$\zeta_{n-1/2, 1+1/2} - \zeta_{n-1/2, 1-1/2} = \frac{\eta_{n,1} - \eta_{n-1,1}}{h_{n-1/2}}. \quad (35)$$

$$\zeta_{n+1/2, 1+1/2} - \zeta_{n-1/2, 1+1/2} = -\frac{1}{h_n} \frac{\eta_{n,1} - \eta_{n-1,1}}{h_{n-1/2}}. \quad (36)$$

Очевидно, что (35) и (36) представляют собой устойчивые схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (ζ - неизвестная функция, правые части известны в каждом угле). Порядок расчета таков: сперва задается произвольное $\zeta_{n-1/2, 1-1/2}$ и вычисляются все значения $\zeta_{n-1/2, 1-1/2}$, $l = 1, \dots, l-1$ по схеме (35). Представление η рядом (9) (в дискретном виде (17)) обеспечивает периодичность $\zeta_{n-1/2, 1-1/2}$ по полярному углу. Затем определяем: $\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{l-1} \zeta_{n-1/2, 1-1/2}$ - коэффициент при нулевой гармонике и вычитаем его из всех значений $\zeta_{n-1/2, 1-1/2}$. Теперь можно утверждать, что:

$$\zeta_{n-1/2, 1-1/2} = \sum_{k=-K, k \neq 0}^{K} \alpha_k \cdot \exp(i k \cdot (1-1/2) \cdot \eta_{n,1}). \quad (37)$$

Последний шаг - вычисление для всех $l = 0, \dots, l-1$ значений $\zeta_{n-1/2, 1-1/2}$ при $n < n_1$ с начальными данными $\zeta_{n-1/2, 1-1/2}$ по схеме (36). Очевидно, что выполнение (37) означает выполнение (10). Заметим, что в силу сказанного в §1 о гомологичных путях, порядок вычисления значений ζ может быть другим.

Для построения конформной сетки необходимо знать отображение (1). Его просто вычислить, если сопряженные функции

η и ζ заданы в одних и тех же точках. Поэтому проводится интерполяция значений сеточной функции $\eta_{n,1}$ в "полуэлемент" узлы. Поскольку потенциал (21) определен на множестве N , то в интерполяционные формулы не должны входить точки из $N \setminus N_1$. Применяя линейную интерполяцию по трем или четырем узлам к серединам ячейки, удается определить значения η во всех "полуэлементных" узлах, принадлежащих D_{ex} . Координатные линии конформной сетки есть линии уровня вещественнозначных функций $|\psi(z)|$ и $\arg \psi(z)$, построенные в D_{ex} . При этом $0 \leq \arg \psi(z) < 2\pi$, $|\psi(z)| \geq 1$. Построение изолиний осуществляется путем одномерной линейной интерполяции на ребрах ячеек "полуэлементной" сетки в D_{ex} . Алгоритм подробно описан в [7]. Таким образом все вычисления - потенциала (21), сопряженной функции ζ , интерполяции и построение линий уровня - проводятся с точностью $O(\tau^2)$.

§4. Описание примеров

Пусть кривая Γ - эллипс с отношением полуосей $b/a = 1/2$. Количество опорных точек $|q| = 150$. В данном и остальных описанных примерах сетка В3 одна и та же: $n_0 = 4$, $n_1 = 60$, $n_2 = 5 \cdot 10^{-2}$, $J = 50$. На рис. 1 приведены координатные линии конформной сетки во внешности эллипса (10×20 узлов), для сравнения маркерами \square отмечены узлы, соответствующие известному известному точному решению:

$$z = \frac{C}{2} \left(R \cdot w + \frac{1}{R \cdot w} \right), \quad C = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad \text{откуда:}$$

$$x = \frac{a+b}{2} \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \left[1 + \frac{1}{R^2 \cdot r^2} \right],$$

$$y = \frac{a+b}{2} \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot \left[1 - \frac{1}{R^2 \cdot r^2} \right], \quad r \geq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (38)$$

Следует отметить хорошее совпадение разностного решения с точным.

На рис. 2 показана сетка, построенная около невыпуклой области D_{1n} , ограниченной кривой:

$$x = a \cdot \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$y = b \cdot \sin \varphi - b_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$y = b \cdot (1 + k \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi - b_0, \quad \pi \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (39)$$

где $a = 1.2$, $b = 0.8$, $k = 1.0$, $b_0 = 0.4$. Количество опорных точек $|q| = 220$. Заметим, что невыпуклость, создавшая дополнительные трудности в реализации метода, описанного на формуле Кристоффеля-Шварца [5, 6], при данном подходе не оказывает влияния на сходимость.

Оба описанных примера касались случая гладкой кривой Γ . Перейдем теперь к построению конформных сеток вокруг областей с негладкой границей, например, кривых профилей с острой кромкой. Конформное отображение в точке излома границы, очевидно, имеет особенность, которая выделяется с помощью преобразования, аналогичного преобразованию Кармана-Трефля (Karlman-Trefl) [2, трансформ], приведенному в [8] для ограниченных областей (см. также [6]).

Итак, пусть есть область D_{1n} с границей $\Gamma = \partial D_{1n}$, имеющей в точке $z = 0$ излом с углом 2δ (внутренним по отношению к D_{1n}), расположенная так, как это показано на рис. 3 - ось абсцисс - дуга окружности угла. На рисунках 3, 4, 5, 6 штриховкой отмечена область, коллинеарная по отношению к отображаемой (D_{ex} -отображаемая), $D_{1n} = \setminus D_{ex}$ - заштрихована). Дугою линейное отображение $\xi = z/(z - z^*)$, $z^* \in D_{1n}$, $z^* \neq 0$ переводит D_{ex} во внутренность контура, изображенного на рис. 4, внешний угол стал 2δ , ось абсцисс - по-прежнему дуга окружности. Далее преобразование $\tau = \xi^p$, $p = \frac{\pi}{\pi - 2\delta}$ "разворачивает" угол, переводя внутренность контура рис. 4 во внутренность гладкого контура рис. 5. Разрез проходит по отрицательной вещественной оси, чем выделяется однозначная ветвь степенной функции. Легко видеть, что точки $\xi = 1$ и $\tau = 1$ обязательно лежат внутри соответствующих контуров, поэтому дугочно-линейное преобразование $w = (\tau - b)/(r - 1)$, ($b \neq 1$) осуществляет отображение внутренней контура рис. 5 на внешность гладкого контура рис. 6, вокруг которого изложенным выше методом строится конформная сетка. Результирующее преобразование:

$$w = \frac{(z/(z - z^*))^p - b}{(z/(z - z^*))^p - 1} \quad (40)$$

имеет обратное:

$$z = z^* \cdot \frac{((w - b)/(w - 1))^{1/p} - 1}{((w - b)/(w - 1))^{1/p} - b} \quad (41)$$

(разрез для ступени проходит также по отрицательной вещественной оси), с помощью которого сетка на плоскости w переходит в сетку на плоскости z . Головная часть профиля рис. 3 представляет собой отрезок эллипса с отношением полуосей $1/3$, хвостовая часть образована двумя прямыми, $\theta = \pi/15$, профиль симметричен относительно оси абсцисс, что не ограничивает общности. Значения констант преобразования (40), (41): $z^* = 1.3$, $b = -1.0$. Сетка показана на рис. 7, количество опорных точек $|q| = 150$. Последовательным применением преобразований, аналогичных (40), (41), может быть построена сетка вокруг контура, имеющего несколько изломов.

Во всех описанных примерах невязка в норме S при выходе из итераций метода сопряженных градиентов составляла порядка 10^{-4} , количество итераций не превосходило размерности S_y .

§5. Заключение

В работе описан алгоритм и приведены примеры построения конформных сеток вокруг ограниченных односвязных областей, в том числе невыпуклых и имеющих негладкую границу. Подобные сетки могут быть использованы для расчета газодинамических течений около тел сложной формы, обеспечивая среди прочих криволинейных сеток минимум вычислительной работы.

Изложенный метод допускает одошение на случай квазиконформных отображений, а также может быть применен и для построения ортогональных сеток в пространстве трех измерений.

В заключение авторы благодарят профессора В. С. Раденякого за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы:

1. В. С. Раденякий "Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред". М., "Наука", 1987.
2. В. В. Шадр "Введение в комплексный анализ. Часть I". М., "Наука", 1985.
3. G. T. Suhl "Numerical mapping of exterior domains". Numer. Math., 1967, 10, pp. 437-445.
4. A. A. Самарский, A. B. Гутин "Численные методы". М., "Наука", 1989.
5. Thompson J. F., Margi S. W., Mastin Z. U. A. "Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations". J. Comp. Phys., v. 47, 1982, # 1, pp. 1-164.
6. D. C. Ives "Conformal grid generation". App. Math. and Comp., 1982, v. 10-11, pp. 107-136.
7. В. М. Вайковский, В. А. Галактионов, Г. Н. Михайлова "Трафар. Трафическое расширение фотрана". М., "Наука", 1985.
8. Shakhmatov S., Anderson D. "Numerical conformal mapping". Math. of Comp., v. 33, 1979, # 147, pp. 953-969.

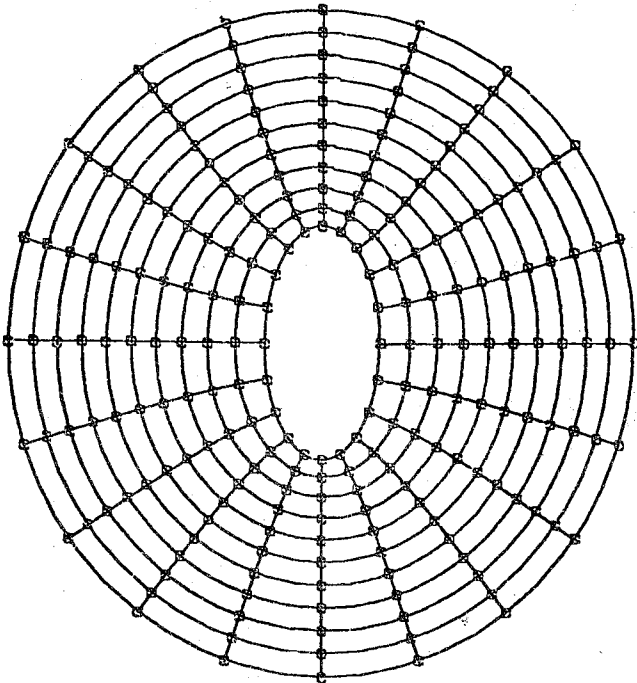


рис. 1

16

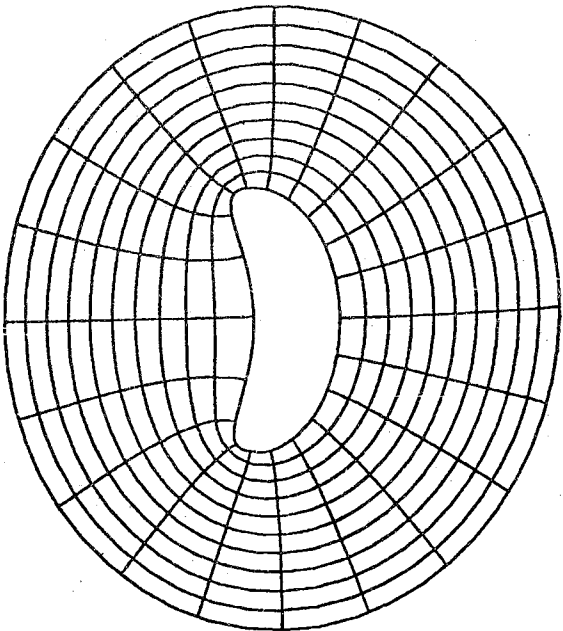
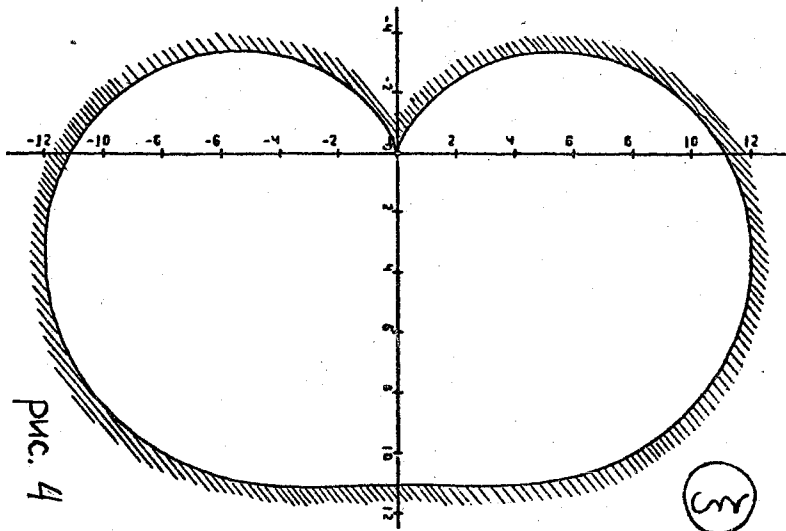


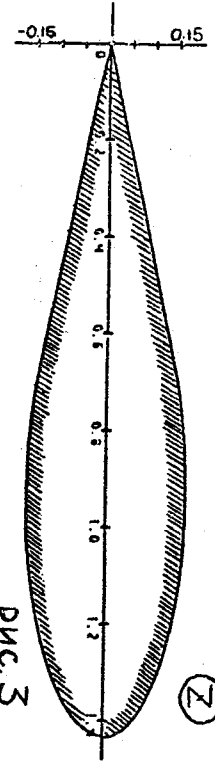
рис. 2

17



pic. 4

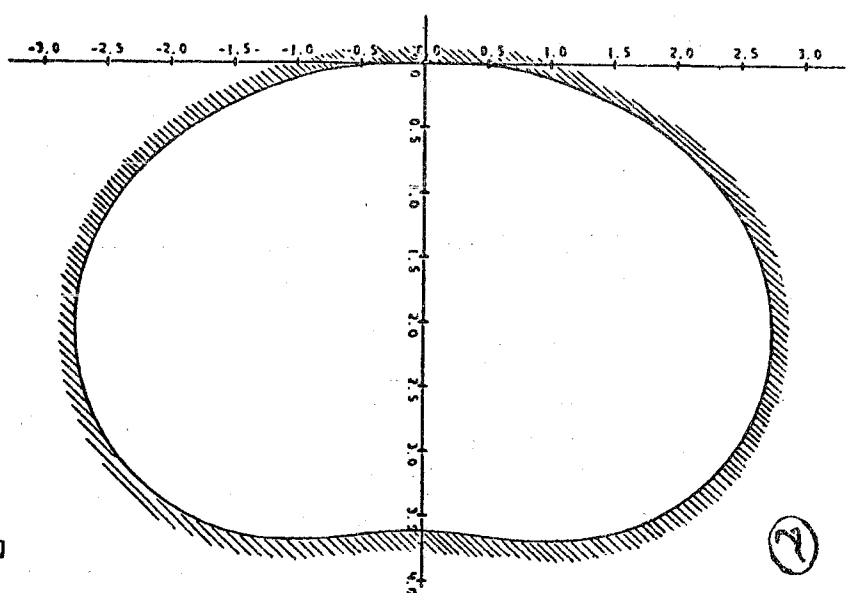
3



pic. 3

2

18



pic. 5

2

19

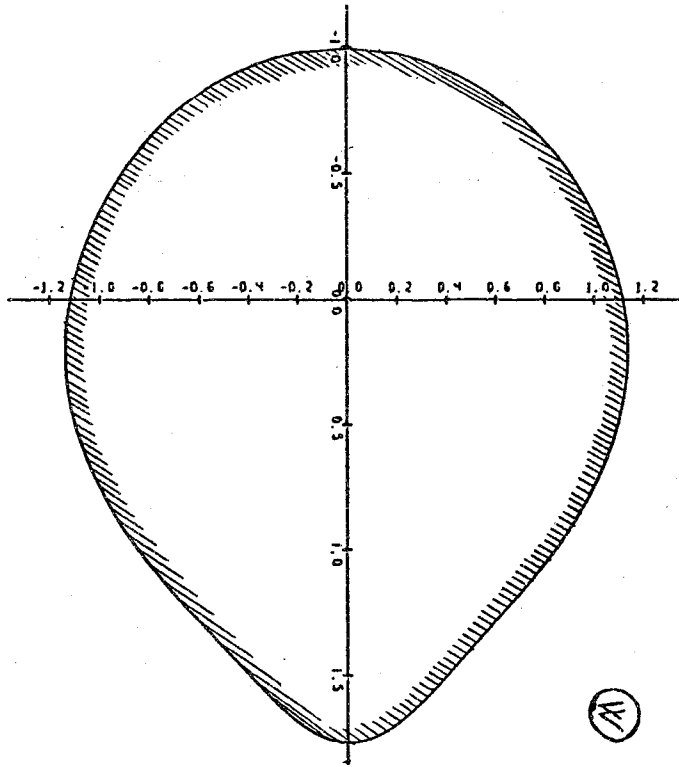


рис. 6

20

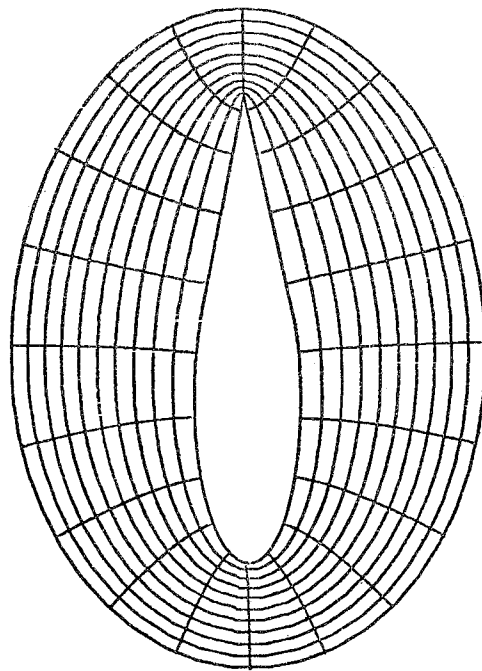


рис. 7

21