ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 425, № 4, с. 456–458

МАТЕМАТИКА

УДК 519.63, 51–73, 534.2, 534.83

РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА ПОДАВЛЕНИЯ ШУМА И ДРУГИЕ ЗАДАЧИ АКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЧАСТОТНЫМ ЗВУКОМ В СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ

© 2009 г. В. С. Рябенький, С. В. Утюжников, С. В. Цынков

Представлено академиком О.М. Белоцерковским 24.05.2008 г.

Поступило 10.12.2008 г.

Пусть одночастотное звуковое поле определено в области, состоящей из двух подобластей, и моделируется как решение линейной разностной задачи. По значениям поля в точках границы между этими подобластями построены формулы для дополнительных источников звука, в результате включения которых акустическое поле в подобластях изменяется желательным образом. Например, независимо и одновременно в каждой из подобластей акустическое поле может быть полностью или частично экранировано от источников, локализованных в дополнительной подобласти.

Рассмотрим разностную краевую задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \quad m \in M, \tag{1}$$

$$u_N \in U_N \tag{2}$$

относительно функции (или вектор-функции) $u_N = \{u_n\}$, $n \in N$. Здесь M – произвольное фиксированное дискретное множество точек m, $m \in M$. Каждой точке $m \in M$ сопоставлено число (или вектор) f_m, а также множество N_m, состоящее из нескольких точек $n \in N_m$. Каждой точке $n \in N_m$, сопоставлен числовой или матричный коэффициент a_{mn}. Решение $u_N = \{u_n\}$ задачи (1) определено на множестве $N = \cup N_m$, $m \in M$, которое образовано объединением шаблонов разностной схемы N_m.

Через U_N обозначено некоторое линейное подпространство всех функций вида u_N. При этом включение (2) играет роль краевого условия, дополняющего уравнение (1). Будем предполагать, что задача (1), (2) имеет одно и только одно решение u_N при произвольном задании $f_M = \{f_m\}$, $m \in M$.

В случае, если задача (1), (2) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу акустики, то решение u_N имеет смысл акустического поля, а правая часть f_M, имеет смысл источника звукового поля u_N.

Коэффициенты a_{mn} характеризуют среду, в которой рассматриваем акустическое поле. Эту удобную терминологию сохраним для задачи (1), (2) даже в случае, если она является абстрактной краевой задачей и не имеет физического смысла.

Пусть $M^+ \subset M$ – некоторое фиксированное подмножество M. Обозначим $M^- = M \backslash M^+$; $N^+ = \cup N_m$, $m \in M^+$; $N^- = \cup N_m$, $m \in M^-$. Определим сеточную границу γ между сеточными подобластями $N^+ \subset N$ и $N^- \subset N$ равенством

$$\gamma = N^+ \cap N^-.$$

Задачи активного управления звуком в составной сеточной области $N = N^+ \cup N^-$, которые будем рассматривать, состоят в построении таких $g_M = \{g_m\}$, $m \in M$, для которых решение v_N задачи

$$\sum a_{mn} v_n = f_m + g_m, \quad m \subset M, \tag{3}$$

$$v_N \subset U_N \tag{4}$$

обладает теми или иными требуемыми свойствами. При этом функцию $g_M = \{g_m\}$, задающую дополнительные источники звука, будем называть активным управлением звуковым полем u_N в составной сеточной области $N = N^+ \cup N^-$.

При построении активных управлений $g_M = \{g_m\}$ будем предполагать, что значения решений w_n, $n \in \gamma$, встречающихся здесь и далее задач вида

$$\sum a_{mn} w_m = \varphi_m, \quad m \in M, \tag{5}$$

$$w_N \in U_N \tag{6}$$

известны в точках границы γ или могут быть получены прямыми измерениями (с помощью микрофонов) или путем математической обработки

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва

School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, University of Manchester, UK

Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh (NC), USA

каких-либо других данных. Отметим, что задача (1), (2), а также задача (3), (4) относятся к типу (5), (6).

Будем предполагать, что введенные выше понятия пространства U_N, разбиение области N на две (пересекающиеся) сеточные подобласти N^+ и N^- и понятие границы $\gamma = N^+ \cap N^-$ согласованы между собой так, что вместе с каждым элементом $z_N \in U_N$ элементы z_N^+ и z_N^-,

$$z_n^+ = \begin{cases} z_n, & n \in N^+, \\ 0, & n \in N \backslash N^+, \end{cases}$$

$$z_n^- = \begin{cases} 0, & n \in N \backslash N^-, \\ z_n, & n \in N^-, \end{cases}$$

также принадлежат пространству U_N. Очевидно, что в этом случае элемент z_N, определенный равенствами

$$z_n = \begin{cases} z_n, & n \in \gamma, \\ 0, & n \notin \gamma, \end{cases} \tag{7}$$

тоже принадлежит пространству U_N.

Обозначим f_m^+ и f_m^-, $m \in M$, две сеточные функции, определенные равенствами

$$f_m^+ = \begin{cases} f_m, & m \in M^+, \\ 0, & m \in M^-; \end{cases} \quad f_m^- = \begin{cases} 0, & m \in M^+, \\ f_m, & m \in M^-, \end{cases} \tag{8}$$

и рассмотрим следующие две задачи:

$$\sum a_{mn} u_n^+ = f_m^+, \quad m \in M, \quad u_N^+ \in U_N, \tag{9}$$

и

$$\sum a_{mn} u_n^- = f_m^-, \quad m \in M, \quad u_N^- \in U_N. \tag{10}$$

Очевидно, что для

$$f_M = \{f_m\}, \ f_M^+ = \{f_m^+\}, \ f_M^- = \{f_m^-\}, \ m \in M,$$

$$u_M = \{u_n\}, \ n_M^+ = \{u_n^+\}, \ u_M^- = \{u_n^-\}, \ m \in N,$$

справедливы равенства

$$u_N = u_N^+ + u_N^-, \quad f_M = f_M^+ + f_M^-.$$

При этом u_N^+ и u_N^- дают вклады в решение u_N задачи (1), (2) влияния источников f_M^+ и f_M^-, локализованных на M^+ и на M^- соответственно.

Воспользуемся следующим известным [1] фактом, который установлен методом разностных потенциалов [2]. Выберем активное управление g_m по формуле

$$g_m = \begin{cases} 0, & m \in M^+, \\ -\sum a_{mn} \bar{u}_n, & m \in M^-, \end{cases}$$

где $\bar{u}_n$ совпадает со значениями u_n решения задачи (1), (2) в точках $n \in \gamma$ и обращается в 0 в точках $n \in N \backslash \gamma$. Тогда решение $v_N = \{v_n\}$ задачи (3), (4) совпадает на подобласти $N^+ \subset N$ с решением u_N^+ задачи (9), т.е. экранировано от влияния источников f_M^-, локализованных на M^-. Зная в силу сделанного предположения о задачах вида (5), (6) поле v_n в точках $n \in \gamma$, получим u_n^+, $n \in \gamma$. В силу формулы $u_N = u_N^+ + u_N^-$ станут известны также значения $u_n^- = u_n - u_n^+$, $n \in \gamma$.

Введем функции

$$g_m^+(\bar{u}_N^+) = \begin{cases} \sum a_{mn} \bar{u}_n^+, & m \in M^+, \\ 0, & m \in M^-; \end{cases} \tag{11}$$

$$g_m^-(\bar{u}_N^-) = \begin{cases} 0, & m \in M^+ \\ \sum a_{mn} \bar{u}_n^-, & m \in M^+, \end{cases} \tag{12}$$

а также функцию

$$g_m(k^+, k^-, \bar{u}_N) = k^+ g_m^+(\bar{u}_N^+) + k^- g_m^-(\bar{u}_N^-), \tag{13}$$

где k^+ и k^- – два независимых друг от друга вещественных параметра.

Т е о р е м а. *Решение задачи*

$$\sum a_{mn} z_n = f_m + g_m(k^+, k^-, \bar{u}_N), \quad z_N \in U_N,$$

можно записать в форме

$$z_n = \begin{cases} u_n^+ + (1 + k^-) u_n^-, & n \in N^+ \backslash \gamma, \\ u_n^- + (1 + k^+) u_n^+, & n \in N^- \backslash \gamma, \\ (1 + k^+) u_n^+ + (1 + k^-) u_n^-, & n \in \gamma. \end{cases} \tag{14}$$

Обсудим результат теоремы. В случае $k^+ = k^- = 0$ в силу (14) $z_N = u_N$, т.е. решение задачи (1), (2) не подвергается изменениям. В случае $k^- = -1$, $k^+ = 0$ в силу формулы (14) решение z_N в точках $n \in N^+ \backslash \gamma$ совпадает с решением u_N^+, т.е. имеет место экранирование акустического поля от источников f_m^-, локализованных на M^-. Если положить $k^+ = k^- = -1$, то акустические поля на $N^+ \backslash \gamma$ и $N^- \backslash \gamma$ будут оба экранированы от воздействия источников, локализованных на M^- или на M^+ соответственно.

Изменяя k^-, можно увеличить в $1 + k^-$ раз вклад источников f_m^-, локализованных на M^-, в акустическое поле на $N^+ \backslash \gamma$. Аналогично, изменяя k^+, можно изменить в $1 + k^+$ раз вклад источников f_m^+, локализованных на M^+, в акустическое поле в точках $n \in N^- \backslash \gamma$. Подчеркнем, что вклады источников f_M^+ и f_M^- в поля в точках $n \in N^+ \backslash \gamma$ или $n \in N^- \backslash \gamma$ не зависят от выбора значений k^+ и k^- соответственно. Таким образом, управления вида (11) вызывают изменения поля только в точках $n \in N^-$, а управление вида (12) вносит вклад в решение только в точках $n \in N^+$.

Следует подчеркнуть весьма важное для создания технических устройств обстоятельство, состоящее в следующем. Для отыскания u_n^+ и u_n^-, $n \in \gamma$, и для получения формул (11)–(13) активных управлений достаточно уметь находить значения решений задач вида (5), (6) только в точках $n \in \gamma$ границы γ, а также знать только те коэффициенты a_{mn}, для которых $n \in \gamma$. Не требуется знание формы области, сеток M и N, значений f_m, $m \in M$, правых частей и значений коэффициентов a_{mn}, $n \notin \gamma$, уравнения (1), а также пространства U_N, задающего граничное условие (2).

Результат о взаимном экранировании подобластей от источников в дополнительных им подобластях, т.е. случай $k^+ = k^- = -1$, содержится как частный случай в работе [3], где рассматриваются некоторые вопросы управления звуком в областях, состоящих из множественных (двух или более) подобластей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08–01–00099).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рябенький В.С.* // Функцион. анализ и его прил. 1995. Т. 29. № 1. С. 70–71.
2. *Рябенький В.С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. М.: Физматлит, 2002.
3. *Рябенький В.С., Утюжников С.В., Цынков С.В.* // ДАН. 2006. Т. 411. № 2. С. 164–168.