

ЗАДАЧА АКТИВНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ В СОСТАВНЫХ ОБЛАСТЯХ

УДК: 534.83; 519.635.4; 517.929.7

В.С. Рябенкий¹, С.В. Утюжников², С.В. Цынков³

¹Институт Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН,
Миусская Пл., 4, Москва, 124047

²School of Mechanical, Aerospace & Civil Engineering,
University of Manchester, P.O. Box 88, Manchester, M60 1QD, UK

³Department of Mathematics,
North Carolina State University, Box 8205,
Raleigh, NC 27695, USA

Введение. Задача активного экранирования заключается в нахождении распределения дополнительных источников в среде с целью исключения влияния одной части пространства на другую. Решение задачи может быть использовано для активного подавления шума и вибрации. Первые теоретические работы в этой области принадлежат Г.Д. Малюженцу [1] и М.В. Федорюку [2]. Современное состояние вопроса, включающее теоретические результаты и их экспериментальную реализацию, в некоторой степени отражено в работах [3-6]. В [7-9] было найдено и рассмотрено общее решение задачи активного экранирования в конечно-разностной постановке, опирающееся на минимальную априорную информацию.

До сих пор в литературе внимание уделялось постановке задачи в простых областях. В настоящей работе постановка задачи обобщается на составные области, и приводится общее решение задачи в конечно-разностной формулировке. В отличие от стандартной постановки задачи активного экранирования в простых областях, рассматривается возможность межобластного сообщения и экранирования. При этом

решение задачи требует проведение некоторых дополнительных измерений или вычислений.

Постановка задачи в дискретном пространстве и ее решение. Рассмотрим разностную краевую задачу вида

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \quad m \in M, \quad (1)$$

$$u_N \in U_N \quad (2)$$

Здесь M - заданное конечное множество точек, N_m - шаблон разностной схемы; $a_{mn}, m \in M, n \in N_m$ - заданные коэффициенты; $f_m, m \in M$ - заданная правая часть; $N = \bigcup N_m, m \in M$, - область определения решения u_n уравнения (1); U_N - заданное линейное подпространство всех функций u_n , определенных для $n \in N$. Включение (2) играет роль заданного линейного однородного граничного условия.

Предположение 1. Задача (1), (2) имеет одно и только одно решение при любой правой части $f_m, m \in M$.

Пусть множество M разбито на некоторое число $I \geq 2$ непересекающихся подмножеств $M_i^+, M = \bigcup M_i^+, i = 1, 2, \dots, I$. Обозначим $M_i^- = M \setminus M_i^+$, $N_i^+ = \bigcup N_m, m \in M_i^+, N_i^- = \bigcup N_m, m \in M_i^-, \gamma_i = N_i^+ \cap N_i^-, \gamma = \bigcup \gamma_i, i = 1, 2, \dots, I$.

Множество γ_i назовем сеточной границей между N_i^+ и N_i^- , и множество γ - сеточной границей выбранного разбиения $M = \bigcup M_i, i = 1, 2, \dots, I$.

Предположение 2. Будем предполагать, что при любой правой части $f_m, m \in M$, уравнения (1) значения u_n решения u_N в точках границы γ известны (например, в случае, если u_n имеет смысл значений звукового давления в точке n , значение u_n может быть измерено с помощью микрофона).

Очевидно, что каждая точка $n \in N$ принадлежит одной сеточной подобласти $N_i^+ \subset N$, если $n \notin \gamma$, или более чем одной из таких подобластей, $N_i^+, i = i_1, i_2, \dots, i_K, K \geq 2$, если n принадлежит сеточной границе γ .

Отнесем каждую точку $n \in N$ к одной и только одной из тех подобластей N_i^+ , к которым эта точка принадлежит, выбирая подобласть N_i^+ из списка допустимых произвольно или принимая во внимание какие-либо дополнительные соображения, которые могут возникнуть в прикладных задачах. Совокупность всех тех точек n , которые отнесены нами к N_i^+ , обозначим $\overline{N_i^+}$ $i=1,2,\dots,I$.

Фиксируем теперь некоторую квадратную $I \times I$ матрицу $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, I$, положив $\alpha_{ii} = 1$, и задавая числа α_{ij} , $i \neq j$, независимо друг от друга равными нулю или единице. Заметим, что матрица α не обязательно симметричная.

Обозначим $z_N^{(i)}$ решение задачи

$$\sum a_{mn} z_n^{(i)} = \alpha_{ij} f_m, \text{ если } m \in M_j, \quad i=1,2,\dots,I \quad (3)$$

$$z_N^{(i)} \in U_N \quad (4)$$

Задача (3), (4) отличается от задачи (1), (2) только тем, что при заданном значении i значения f_m в правой части задачи (1), (2) заменены нулями в подобластях M_j^+ с теми номерами j , для которых $\alpha_{ij} = 0$.

Введем функцию z_N , положив

$$z_N|_n = z_n^{(i)}, \text{ если } n \in \overline{N_i^+}, \quad i=1,2,\dots,I \quad (5)$$

Следует заметить, что функция z_N есть однозначная функция точек множества N .

Определение. Назовем функцию g_m , $m \in M$, активным α -экранирующим подобласти $\overline{N_i^+}$, $i=1,2,\dots,I$, управлением, если решения v_n задачи

$$\sum a_{mn} v_n = f_m + g_m, \quad m \in M \quad (6)$$

$$v_N \in U_N \quad (7)$$

совпадает с функцией (5):

$$v_N = z_N \quad (8)$$

Целью предлагаемой работы является выяснение условий существования и построение α -экранирующего управления g_m .

Укажем способ отыскания значений $z_n^{(i)}$ решения задачи (3), (4) в точках $n \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, I$. Оказывается, что остальные значения функции $z_n^{(i)}$ несущественны.

Обозначим $M^+(i)$ теоретико-множественное объединение всех тех M_j^+ , $j = 1, 2, \dots, I$, для которых $\alpha_{ij} = 1$. Далее обозначим $M^-(i) = M \setminus M^+(i)$; $N^+(i) = \bigcup_{m \in M^+(i)} N_m$; $N^-(i) = \bigcup_{m \in M^-(i)} N_m$; $\gamma(i) = N^+(i) \cap N^-(i)$.

Теперь задача (3), (4) может быть переписана так:

$$\sum a_{mn} z_n(i) = \begin{cases} f_m, & \text{а именно } m \in M^+(i) \\ 0, & \text{а именно } m \in M^-(i) \end{cases} \quad (9)$$

$$z_N^{(i)} \in U_N \quad (10)$$

Предположение 3. Будем предполагать, что вместе с каждой функцией $v_N \in U_N$ функция $\Theta_N(N^+(i)) \cdot v_N$ также принадлежит U_N . Здесь

$$\Theta_N(N^+(i))|_n = \begin{cases} 1, & \text{а именно } n \in N^+(i) \\ 0, & \text{а именно } n \notin N^+(i) \end{cases}$$

В работе [7] показано, что решение задачи (9), (10) в точках $n \in N^+(i)$ совпадает с решением задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n(i) = f_m + g_m(i), \quad m \in M \quad (11)$$

$$v_N(i) \in U_N,$$

где

$$g_m(i) = \begin{cases} 0, & \text{а именно } m \in M^+(i) \\ -\sum a_{mn} w_n, & \text{а именно } m \in M^-(i) \end{cases} \quad (12)$$

$$w_n = \begin{cases} u_n, & \text{а именно } n \in \gamma(i) \\ 0, & \text{а именно } n \notin \gamma(i) \end{cases} \quad (13)$$

Добавляя к правой части f_m задачи (1), (2) источники $g_m(i)$ и измеряя возникающие при этом значения решения $v_n(i)$ в точках $n \in \gamma_i$, мы получим значения $z_n(i)$ в этих точках.

Указанное измерение можно осуществить в силу *Предположения 2*, поскольку задача (11) есть задача вида (1), (2). Повторяя процедуру для каждого i , получим $z_n(i)$, $n \in \gamma_i$, $i = 1, 2, \dots, I$. Зная значения $z_n(i)$, мы получаем и значения $z_n^{(i)}|_{\gamma}$.

Теорема. Пусть функция z_N , определенная равенством (5), принадлежит U_N . Тогда активное α -экранирующее управление g_m , $m \in M$, существует, единственно и задается формулой

$$g_m = \sum a_{mn} (z_n^{(j)} - z_n^{(i)}), \quad \text{где} \quad m \in M_i^+, \quad n \in \overline{N_j^+} \quad (14)$$

Анализ формул (12), (13), (14) показывает, что вид этих формул не меняется, если изменить f_m , $m \in M$, пространство U_N , задающее граничные условия, сами множества M и M_i^+ ($i=1,2,\dots,I$), значения коэффициентов a_{mn} , для которых $n \notin N_m \cap \gamma$. Изменение этих факторов может сказаться только на значениях u_n , измеренных в точках $n \in \gamma$, и $z_n^{(i)}$ измеренных в точках γ_i , но не на виде формул (12), (13), (14).

Заключение. Результаты, полученные здесь, означают, что включение α -экранирующего управления окажет такое воздействие на систему, которое автоматически учитывает все те свойства задачи (1), (2), которые существенны для активного экранирования.

Следует заметить, что здесь часть трудностей, связанных с экранированием, удается преодолеть благодаря автоматическому учету решением всех необходимых характеристик рассматриваемой системы или ее математической модели (1), (2). Заметим еще, что в том случае когда задача (1), (2) является разностной моделью дифференциальной краевой задачи экранирования, выбор аппроксимирующей разностной задачи допускает большую свободу. При этом для вычисления α -экранирующего управления g_m требуется найти лишь ту часть решения разностной задачи (1), (2), которая оказывает влияние на α -экранирующее управление g_m .

Таким образом, полученные здесь результаты, возможно, облегчают задачу создания реальных экранирующих технических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малюженец Г.Д. Нестационарная задача дифракции для волнового уравнения с компактным носителем правой части.- Труды Акустического Института: Академия Наук СССР.- 1971. –Изд. 15.-С. 124-139.
2. Федорюк М.В. Нестационарная проблем подавления звука. Акустический журнал// – 1976.-Т.22.- N3.- С. 339-443.

3. Nelson P.A., Elliott S.J. Active control of sound.- San Diego, USA : Academic Press, 1992.
4. Fuller C.R., Nelson P.A., Elliott S.J. Active control of vibration. - Academic Press, 1996.
5. Tochi O., Veres S. Active sound and vibration control. Theory and applications. - The Institution of Electrical Engineers, 2002.
6. Loncaric J., Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V. Active shielding and control of noise// SIAM J. Appl. Math.. -Vol. 62.- 2001.- P.563-596.
7. Рябенский В.С. Разностная задача активного экранирования// Функциональный анализ.- Т. 29. N1.- 1995. P.70-71.
8. Вейцман Р.И., Рябенский, В.С. Разностные задачи экранирования и имитации// Докл. РАН.- 1997.- Т.354.- № 2.- С. 151-154
9. Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов и его приложения.- Физматлит, 2002.