МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 11 номер 12 год 1999

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛАКУН 3D – ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

© *В.С. Рябенький, В.И. Турчанинов, С.В. Цынков*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Российская академия наук, Москва

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (Гранты № 99–01–00985 и № 98–01–00177)

Рассматривается проблема вычисления решения задачи Коши в единичном шаре пространства при произвольно больших значениях времени. Предполагается, что решение и его производная по времени в начальный момент времени равны нулю, а правая часть обращается в нуль вне единичной сферы пространства при всех значениях времени.
Предложены алгоритмы приближенного вычисления решения, основанные на использовании лакун волнового уравнения и стандартной явной девятиточечной разностной схемы на шаблоне типа крест.
Погрешности при вычислениях по этим алгоритмам не накапливаются с ростом числа шагов, а количества арифметических операций и ячеек памяти для расчета решения на очередном слое по времени при фиксированной сетке не возрастают с ростом номера слоя.
Результаты работы могут быть непосредственно использованы при расчете акустических, упругих и электромагнитных полей в окрестности локализованного нестационарного источника.

ON LAKUNA BASED ALGORITHM FOR NUMERICAL SOLUTION OF 3D–WAVE EQUATION FOR ARBITRARY GREAT TIME

V.S.Ryaben'kii, V.I.Turchaninov, S.V.Zsynkov

A numerical algorithm for 3D–wave equation Cauchy–problem is constructed. It is assumed the Cauchy–dates identically zero and right hand of wave–equation is zero

outside of unit sphere. The domain to compute is bounded and fixed. The algorithm provides the solution during arbitrary long time with prestabileshed arbitrary exactness. The computer expenditures for one time–step progress are independet on time–step number and can't be decreased essentially.
The lacuna of 3D– wave equation is used.
The results can be used for calculations of acoustic, elastic and electromagnetic fields around local nonstationary sources.

1

. Введение

Существует много физических нестационарных процессов, уравнения которых во всем пространстве или вне некоторой ограниченной его части совпадают с однородным волновым уравнением или сводятся к этому уравнению. Первым кругом примеров данных задач являются задачи о расчете акустических, упругих и электромагнитных полей в окрестности локализованного нестационарного источника. Другой класс примеров доставляют задачи дифракции волн на ограниченных телах и задачи трехмерного нестационарного потенциального обтекания тел газом.

Результаты этой работы могут быть непостредственно использованы для численного решения задач из первого названного круга примеров. По-видимому, результаты могут быть использованы также для построения искусственных граничных условий, заменяющих волновое уравнение вне расчетной подобласти в случае задач из второго круга примеров.

Мы будем рассматривать проблему вычисления решения $u(\bar{x}, t)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = f(\bar{x}, t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

$$u \mid_{t=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \tag{1.2}$$

для $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, принадлежащих сфере $S_1 : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$, или $\bar{x} \in S_1$, и сколь угодно больших t. Относительно $f(\bar{x}, t)$, будем предполагать, что это достаточно гладкая по всем своим четырем аргументам во всем пространстве $(\bar{x}, t)$ функция, обращающаяся в нуль вне некоторой области Q точек $(\bar{x}, t)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, \qquad t > 0,$$

то есть

$$\operatorname{supp} f(\bar{x}, t) = Q. \tag{1.3}$$

Мы построим эффективные алгоритмы численного решения этой проблемы, использующие простейшую девятиточечную разностную схему "крест" (см. например [1]), аппроксимирующую задачу (1.2), (1.2) на гладких решениях со вторым порядком относительно шага h сетки по пространству. Эта схема строится на сетке $m = (m_1h, m_2h, m_3h, m_4\tau)$, $\qquad m_1, m_2, m_3, m_4$ – целые. Уравнение (1.1) заменяется в точке m сетки разностным уравнением

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \tag{1.4}$$

связывающим значения u_n в следующих девяти точках сетки, образующих шаблон N_m (индексы 0,1,...,8 при n суть номера точек $n \in N_m$ шаблона):

$$\begin{cases} n^j = (m_1h, m_2h, m_3h, (m_4 - j)\tau), \quad j = 0, 1, 2, \\ n^{3,4} = ((m_1 \pm 1)h, m_2h, m_3h, (m_4 - 1)\tau), \\ n^{5,6} = (m_1h, (m_2 \pm 1)h, m_3h, (m_4 - 1)\tau), \\ n^{7,8} = (m_1h, m_2h, (m_3 \pm 1)h, (m_4 - 1)\tau). \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь a_{mn} и f_m определены формулами

$$a_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = n^0 \quad \text{или} \quad n^2, \\ -r^2, & \text{если} \quad n = n^3, n^4, n^5, n^6, n^7, n^8, \\ -2 + 6r^2, & \text{если} \quad n = n^1, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$f_m = \tau^2 f(m_1h, m_2h, m_3h, (m_4 - 1)\tau), \tag{1.7}$$

где

$$r = \tau/h \le \sqrt{3}/3. \tag{1.8}$$

Начальные условия (1.2) заменяем условиями

$$u^p_{n_1,n_2,n_3} = 0, \qquad p = n_4 = 0, 1. \tag{1.9}$$

Известно, что при достаточно гладкой по всем аргументам функции $f(\bar{x}, t)$ решение разностной задачи $u_n \equiv u_{(n_1,n_2,n_3,n_4)} \equiv u^p_{n_1,n_2,n_3}$, где $p = n_4$, сходится к решению $u(\bar{x}, t)$ задачи (1.1), (1.2), причем выполняется оценка

$$\max_{n_1,n_2,n_3,p} \mid u(n_1h, n_2h, n_3h, p\tau) - u^p_{n_1,n_2,n_3} \mid \le C \mid f \mid_{k,T} h^2 \qquad p\tau < T. \tag{1.10}$$

Здесь $C = C(T)$ – постоянная, k – достаточно большое натуральное число, а $\mid f \mid_{k,T}$ – сумма максимумов модулей производных до порядка k функции $f(\bar{x}, t)$ при $t \le T$. Таким образом, формально схема (1.4)-(1.9) в силу оценки (1.10) позволяет вычислять решение $u(\bar{x}, t)$ задачи (1.1), (1.2) сколь угодно долго.

Однако имеются следующие два препятствия. В процессе счета по схеме (1.4)-(1.9) количество точек сетки, значения в которых вовлечены в расчет на p-м слое, возрастает как $(2/h + p)^3$, так что при $p \approx t/\tau$ и $\tau = rh$, $r = \sqrt{3}/3$ это количество по порядку совпадает с $(t/h)^3$. Таким образом, объем памяти и вычислительной работы быстро возрастают с ростом t, до которого должен быть доведен расчет. В этом состоит первое препятствие для расчета на больших временах t. Во-вторых, оценка (1.10) не гарантирует от накопления погрешности с ростом t и соответствующего числа шагов.

Мы предложим три варианта усовершенствования простейшей разностной схемы (2.4), основанных на учете специфики задачи (1.1), (1.2). В каждом из предлагаемых алгоритмов гарантировано ненакопление погрешности расчета при увеличении номера слоя. Число арифметических операций и необходимое число ячеек памяти при фиксированных h и τ для перехода на следующий слой тоже остаются ограниченными независимо от слоя.

Число арифметических операций для перехода на следующий слой при измельчении сетки во всех этих алгоритмах имеет порядок $O(N)$, где N- число точек одного слоя сетки, попадающих в сферу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Очевидно, этот порядок нельзя улучшить за счет выбора разностного алгоритма.

Количество ячеек памяти во всех вариантах имеет порядок $O(N)$, т.е. не превосходит числа $C \cdot N$, где C некоторая константа, зависящая от варианта.

Все три названные варианта усовершенствования первоначальной схемы (1.4), (1.7), (1.9) для вычисления решения $u(\bar{x}, t)$ задачи (1.3) для $\bar{x} \in S_1$ при любых t опираются на свойство 3D–волнового уравнения (1.1) иметь лакуны.

2

. Лакуны волнового уравнения

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} \right) = \varphi(\bar{x}, t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$v \mid_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что $\varphi(\bar{x}, t)$ достаточно гладкая по всем своим четырем аргументам функция, обращающаяся в нуль при $t \leq 0$. Решение $v(\bar{x}, t)$ задачи (2.1), (2.2) записывается формулой Кирхгофа (см., например, [2])

$$v(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varphi(y, t-r)}{r} dy, \tag{2.3}$$

где $r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$, $dy = dy_1 \cdot dy_2 \cdot dy_3$, и интеграл берется по всему пространству $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Из формулы Кирхгофа (2.3) следует, что решение $v(\bar{x}^{(0)}, t^{(0)})$ в точке $(\bar{x}^0, t^0)$ зависит от значений $\varphi(\bar{x}, t)$ только на поверхности нижней полы характеристического конуса

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = (t - t_0)^2, \quad t < t_0. \tag{2.4}$$

Пусть $(\bar{\xi}, \eta)$ произвольная фиксированная точка пространства $(\bar{x}, t)$. Обозначим $D(\xi, \eta)$ область, координаты точек (x_1, x_2, x_3, t) которой удовлетворяют следующим двум неравенствам:

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2 \leq (t - \eta)^2, \quad t > \eta.$$

Эта область есть внутренняя часть верхней полы характеристического конуса

$$(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2=(t-\eta)^2. \tag{2.5}$$

Пусть Q некоторая произвольная фиксированная область пространства $(\bar{x},t)$. Обозначим

$$D(Q)=\bigcap D(\bar{\xi},\eta), \quad (\bar{\xi},\eta)\in Q$$

пересечение $D(\bar{\xi},\eta)$, отвечающих всем точкам $(\bar{\xi},\eta)\in Q$. Известно, что решение $v(\bar{x},t)$ задачи (2.1), (2.2) в области $D(Q)$ не зависит от значений правой части $\varphi(\xi,t)$ в точках $(\xi,\eta)\in Q$. В частности, решение $v(\bar{x},t)$ задачи (2.1), (2.2) обращается в нуль в точках $D(Q)$,

$$v(\bar{x},t)\equiv 0, \quad (\bar{x},t)\in D(Q), \tag{2.6}$$

если

$$\operatorname{supp}\varphi(\bar{x})=Q. \tag{2.7}$$

Это свойство независимости значений решения $v(\bar{x},t)$ в $(x,t)\in D(Q)$ от значений правой части $\varphi(\xi,\eta)$ в точках $(\xi,\eta)\in Q$ называют свойством волнового уравнения в трехмерном пространстве иметь лакуны, а множество $D(Q)$ называют лакуной решения по отношению к источникам звука, лежащим в области Q. Если Q определено следующим образом:

$$Q=\{(\bar{x},t)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2<1, \quad a<t<b\}, \tag{2.8}$$

то при условии (2.7) решение $v(\bar{x},t)$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{cases} v(\bar{x},t)\equiv 0, & \text{если} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2<1, \quad t<a,\\ v(\bar{x},t)\equiv 0, & \text{если} \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2<1, \quad t>b+2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Первое тождество (2.9) очевидно и имеет место в силу того, что начальные данные (2.2) задачи Коши обращаются в нуль.

Второе тождество (2.9) справедливо в силу тождества (2.6), поскольку область пространства $\bar{x},t$, выделяемая неравенствами $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1, \quad t>b+2$, целиком содержится внутри лакуны $D(Q)$.

Представим теперь решение $u(\bar{x},t)$ исходной задачи (1.1), (1.2) в удобном для дальнейшего виде. Для этого нам понадобится следующее "разбиение единицы".

Определим функцию

$$\Psi(t)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0\le t\le 1/2,\\ P(t), & \text{если} \quad 1/2<t<1,\\ 0, & \text{если} \quad t\ge 1,\\ \Psi(-t), & \text{если} \quad t\le 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Здесь $P(x)$ – многочлен вида

$$P(x)=\frac{1}{2}+a(t-\frac{3}{4})+b\left(t-\frac{3}{4}\right)^3+c\left(t-\frac{3}{4}\right)^5+d\left(t-\frac{3}{4}\right)^7+e\left(t-\frac{3}{4}\right)^9$$

с такими коэффициентами $a, b, c, d, e,$ что

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1) = P''''(1) = 0.$$

Функция $\Psi(t)$ есть четная функция, имеющая всюду на оси ot непрерывные четвертые производные, причем

$$\operatorname{supp} \Psi(t) = [-1, 1],$$

т.е.

$$\Psi(t) \equiv 0, \qquad | t | \geq 1.$$

Зададим параметр $T > 0$ и рассмотрим функции $\Psi_j(t, T)$,

$$\Psi_j(t, T) = \Psi(t/T - j), \qquad j = 0, 1, 2.$$

Очевидно,

$$\operatorname{supp} \Psi_j(t, T) = [(j-1)T, (j+1)T], \qquad j = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(t, T) \equiv 1, \qquad t \geq 0. \tag{2.12}$$

Запись функции 1 в виде (2.12) и есть "разбиение единицы". Заметим, что при каждом $t > 0$ не более двух слагаемых в левой части тождества (2.12) отличны от нуля.

Представим правую часть $f(\bar{x}, t)$ уравнения (1.1) в виде

$$f(\bar{x}, t, T) = f(\bar{x}, t) \sum_j \Psi_j(t, T) = \sum_j \Psi_j(t, T) f(\bar{x}, t) = \sum_j f_j(\bar{x}, t, T), \tag{2.13}$$

где

$$f_j(\bar{x}, t, T) = \Psi_j(t, T) f(\bar{x}, t).$$

Очевидно,

$$\operatorname{supp} f_j(\bar{x}, t) = Q_j(T), \tag{2.14}$$

где

$$Q_j(T) = \{(\bar{x}, t) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1, \quad (j-1)T \leq t \leq (j+1)T\}. \tag{2.15}$$

Рассмотрим последовательность следующих задач:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2} \right) = f_j(x, t, T) \\
u_j \mid_{t=0} = \left. \frac{\partial u_j}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots .
\end{gathered} \tag{2.16}$$

В силу линейности задачи (1.1), (1.2) и представления $f(\bar{x},t)$ в виде (2.13), решение задачи (1.1), (1.2) можно представить в виде

$$u(\bar{x},t) = \sum_j u_j(\bar{x},t,T), \tag{2.17}$$

где $u_j(\bar{x},t,T)$ – решение задачи (2.16). Покажем, что при $\bar{x} \in S_1$ и каждом фиксированном $t > 0$ имеется лишь конечное число значений j, при которых $u_j(\bar{x},t,T) \neq 0$. Применим тождества (2.9), имеющие место при условиях (2.7), (2.8), к решению $u_j(\bar{x},t,T)$ задачи (2.16). При этом вместо (2.7) и (2.8) используем (2.14) и (2.15) соответственно. Вместо тождеств (2.9) получим соответственно следующие два тождества:

$$u_j(\bar{x},t,T) \equiv 0, \quad \text{если} \quad t \leq (j-1)T, \tag{2.18}$$

$$u_j(\bar{x},t,T) \equiv 0, \quad \text{если} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\ t \geq (j+1)T + 2. \tag{2.19}$$

Отметим для дальнейшего, что решение $u_j(\bar{x},t)$ задачи (2.16) при любом $t > (j-1)T$ обращается в нуль вне сферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = [t-(j-1)T+1]^2$, т.е.

$$u_j(\bar{x},t,T) \equiv 0, \quad \text{если} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq [t-(j-1)T+1]^2. \tag{2.20}$$

Тождество (2.20) вытекает из тождества (2.18), из равенства $f_j(\bar{x},t,T) \equiv 0$, при любом t если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1$, а также из формулы Кирхгофа (скорость распространения волны, т.е. "скорость звука", равна единице).

В силу (2.18), (2.19) при заданном t решение $u_j(\bar{x},t,T)$ при $x \in S_1$ может отличаться от нуля только в том случае, если

$$(j-1)T < t < (j+1)T + 2. \tag{2.21}$$

Заданное фиксированное $t = t^0$ удовлетворяет обоим этим неравенствам, если одновременно выполнены неравенства

$$\frac{t^0 - T - 2}{T} < j < \frac{t^0 + T}{T}. \tag{2.22}$$

Таким образом, длина интервала, на котором должно лежать целое j, есть $2 + 2/T$. При $T > 2$ эта длина меньше 3, а значит таких целых чисел j имеется 2 или 3 в зависимости от расположения этого интервала на оси. При $T \to +0$ длина $2 + 2/T$ интервала неограниченно возрастает, а вместе с тем количество последовательных натуральных чисел j, удовлетворяющих неравенствам (2.22), тоже неограниченно возрастает. Мы собираемся использовать представление решения $u(\bar{x},t)$ задачи (1.1), (1.2) в виде (2.17). Отметим, что слагаемое $u_j(\bar{x},t,T)$ в этой формуле интересует нас только до момента времени

$$t = (j+1)T + 2, \tag{2.23}$$

так как начиная с этого момента $u_j(\bar{x},t,T)$ обращается в нуль в расчетной области $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ в силу (2.19) и не вносит вклада в сумму (2.17). Единичная сфера в момент (2.23) образует задний фронт распространения решения $u_j(\bar{x},t,T)$ по невозмущенному нулевому фону.

Отметим, что передний фронт возмущения покоя, т.е. поверхность, вне которой $u_j(\bar{x},t,T)=0$ в момент времени (2.23), есть сфера радиуса $2T+3$:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(2T+3)^2. \tag{2.24}$$

Последнее утверждение относительно сферы (2.24) есть следствие (2.20) при $t=$
$=(j+1)T+2$.

Вычислительные алгоритмы, которые мы предложим ниже, основаны на том, что при вычислении решения $u(\bar{x},t)$ мы при каждом t будем вычислять только несколько слагаемых $u_j(x,t,T)$ в сумме (2.7), которые отличны от нуля при x_1^2+ $+x_2^2+x_3^2\le 1$.

Мы видели, что этих слагаемых только 2 или 3, если $T>2$, но их число может быть сколь угодно большим при малых T. Сделаем еще одно важное замечание. Зададим некоторое $z>0$. Будем рассматривать вместо задачи Коши (2.16) следующую смешанную задачу в области $|\ x_j\ |\le z, \qquad -\infty<t<\infty$:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3^2}\right)=f_j(\bar{x},t,T), \quad |\ x_k\ |\le z, \qquad k=1,2,3, \tag{2.25}$$

$$v_j(\bar{x},t,T)\equiv 0, \qquad t<(j-1)T, \tag{2.26}$$

$$v_j(\bar{x},t,T)=0, \qquad \max|\ x_k\ |=z, \quad k=1,2,3. \tag{2.27}$$

Покажем, что в случае

$$z\ge T+2 \tag{2.28}$$

решение $u_j(\bar{x},t,T)$ задачи (2.16) и решение $v_j(\bar{x},t,T,z)$ задачи (2.25)–(2.27) совпадают в точках единичного шара S_1, $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$ при $t\le(j+1)T+2$:

$$u_j(\bar{x},t,T)=v_j(\bar{x},t,T,z), \quad \bar{x}\in S_1, \qquad t\le(j+1)T+2. \tag{2.29}$$

Для обоснования этого утверждения воспользуемся формулой Кирхгофа. В самом деле, $f_j(\bar{\xi},\eta,T)$ может отличаться от нуля только для

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\le 1, \qquad \eta>(j-1)T.$$

Ближайшая к шару S_1 точка границы куба $\max\limits_j\ |\ x_j\ |<z$ отстоит от шара на расстояние $z-1$. Поэтому влияние $f_j(\xi,\eta,T)$ может достичь границы этого куба за время $z-1$, то есть к моменту $t=(j-1)T+z-1$. Отраженный от границы сигнал, вызывающий отличие $v_j(\bar{x},t,T,z)$ от $u_j(\bar{x},t,T)$, пройдет расстояние от границы куба $|\ x_j\ |\le z$ до границы шара S_1, то есть расстояние $z-1$, также за время $z-1$. Таким образом влияние отраженного сигнала не исказит решение $v_j(\bar{x},t,T,z)$ по сравнению с $u_j(\bar{x},t,T)$ раньше момента $t_1=[(j-1)T+z-1]=(j-1)T+2(z-1)$. Однако при условии (2.28) справедливо $t_1\ge(j+1)T+2$, так что (2.29) доказано. Отметим еще, что в точках единичного шара $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$ справедливо

$$u_j(\bar{x},t,T)=0 \qquad \text{при} \quad t\ge(j+1)T+2. \tag{2.30}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\begin{cases} u_j(\bar{x},t,T) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad t \le (j-1)T, \\ v_j(\bar{x},t,T,z) \equiv 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

В силу (2.30) и (2.31) тождество (2.17) в точках $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1$ можно преобразовать к виду

$$u(x,t) \equiv \sum u_j(x,t,T), \tag{2.32}$$

где $\sum$ означает сумму по тем значениям j, которые удовлетворяют неравенствам

$$\frac{t-2}{T} - 1 \le j \le \frac{t}{T} + 1,$$

одновременное выполнение которых необходимо для того, чтобы $u_j(\bar{x},t,T) \ne 0$ при $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1$.

Но в силу (2.29) можно заменить в (2.32) слагаемое $u_j(\bar{x},t,T)$ на $v_j(\bar{x},t,T,z)$, получив

$$u(\bar{x},t) = \sum v_j(\bar{x},t,T,z), \quad z \ge T+2, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1. \tag{2.33}$$

3

. Разностные алгоритмы

Мы построим три алгоритма приближенного вычисления решения задачи (1.1), (1.2) с помощью разностной схемы (1.4) на произвольно больших временах без накопления погрешности и без увеличения компьютерных расходов для продвижения на один шаг по времени. Все три алгоритма имеют один и тот же неулучшаемый порядок числа арифметических операций и числа ячеек памяти для продвижения на один слой по времени. Однако эти алгоритмы отличаются друг от друга различным числом арифметических операций или числом ячеек памяти при сохранении порядка, а также теми или иными удобствами для вычислений.

Во всех трех алгоритмах мы считаем, что T, h и $\tau > 0$ выбраны так, что

$$T = k\tau, \qquad k - \text{натуральное}$$

$$\tau/h = 0.99/\sqrt{3} < 1/\sqrt{3}. \tag{3.1}$$

П е р в ы й а л г о р и т м. В основе этого алгоритма лежит представление решения $u(\bar{x},t)$ задачи (1.1), (1.2) в шаре $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1$ в форме (2.32).

Фиксируем произвольное целое l и будем рассматривать t из отрезка

$$(l-1)T \le t < lT. \tag{3.2}$$

Для таких T формула (2.32) в развернутом виде примет вид

$$u(\bar{x},t) = u_{l-s}(\bar{x},t,T) + u_{l-s+1}(\bar{x},t,T) + \ldots + u_l(\bar{x},t,T), \tag{3.3}$$

где $u_j(\bar{x},t,T)$ – решение задачи (2.16). Натуральное число s в силу (2.21) должно быть выбрано из условий $s \geq [2/T]+1$, если $2/T$ – дробь, $s \geq 2/T$, если $2/T$ – целое. Будем считать для определенности, что s выбрано по формуле

$$s = 2/T + 1, \tag{3.4}$$

причем $2/T$ – целое число. Первый численный алгоритм состоит в том, что в качестве приближенных значений решения $u(\bar{x},t)$ в точках сетки $n = (n_1h, n_2h, n_3h, n_4\tau)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам (3.2) и $(n_1h)^2+(n_2h)^2+(n_3h)^2 \leq 1$, вместо точной формулы (3.3)

$$u(n_1h,n_2h,n_3h,n_4\tau) = \\ = u_{l-s}(n_1h,n_2h,n_3h,n_4\tau) + \ldots + u_l(n_1h,n_2h,n_3h,n_4\tau) \tag{3.5}$$

мы воспользуемся приближенной формулой

$$u(n_1h,n_2h,n_3h,n_4\tau) \approx u_n(l-s,T) + \ldots + u_n(l,T). \tag{3.6}$$

Слагаемое $u_n(j,T)$ в правой части (3.6) определено как решение следующего разностного аналога задачи (2.16):

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n(j,T) = f_m(j,T), \quad j = l-s, l-s+1, \ldots, l, \tag{3.7}$$

$$u_n = 0, \quad \text{если} \quad n_4\tau \leq (j-1)T. \tag{3.8}$$

Правая часть $f_m(j,T)$ в силу (2.13) есть

$$f_m(j,T) = f_j(\bar{x},t,T)\,|_{\bar{x}=m_1h,m_2h,m_3h,\ t=m_4\tau} = [\Psi_j(t,T)f(\bar{x},t)]_{\bar{x}=(m_1h,m_2h,m_3h),\ t=n_4\tau}.$$

Заметим, что в силу формул (2.10)

$$f_m(j,T) = 0, \qquad \text{если} \quad m_4\tau \leq (j-1)T + \tau \tag{3.9}$$

Можно считать, что решение задачи (2.16) получено приближенно с помощью задачи (3.7), (3.8) только на отрезке $(l-s)T \leq t \leq lT$, длина которого не зависит от l. Поэтому погрешность от замены $u_j(\bar{x},t)$ приближенно решениями $u_n(j,T)$ разностной задачи, осуществленная в формуле (3.6), не превосходит $(s+1)Ch^2$, где постоянная C зависит только от свойств функции $f_j(\bar{x},t)$ на отрезке $(j-1)T \leq t \leq (j+1)T$, а $(s+1)$ – число слагаемых в приближенной формуле (3.6). Очевидно, эта погрешность не возрастает с ростом номера n_4 по времени.

Оценим объем памяти и числа арифметических операций изложенного алгоритма для расчета на одном временном слое. Ясно, что объем памяти для расчета каждого слагаемого $u_n(j,T)$ на очередном слое есть $O(h^{-3})$. Такой же порядок числа арифметических действий: $O(h^{-3})$. Число слагаемых s при фиксированном T не меняется в процессе измельчения сетки. Соответственно сохраняется и порядок $O(h^{-3})$ для объема памяти и числа арифметических действий. Ясно, что за счет изменения алгоритма отыскания решения разностного уравнения этот порядок $O(h^{-3})$ уменьшить нельзя, так как в расчетной области $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1$ на каждом слое по времени лежит $[4/3\pi + o(1)]\,h^{-3} = O(h^{-3})$ расчетных точек сетки, попавших в единичный шар $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1$. Заметим, что при вычислении сеточной функции $u_n(l-s,T)$ на временном слое $t = n_4\tau \approx lT$ в расчет по явной разностной схеме для $u_n(l-s,T)$ вовлекаются точки сетки, лежащие в кубе $| x_i | \leq 3+T$. В этом кубе лежит

$$\left[\frac{3+T}{h}\right]^3 \tag{3.10}$$

точек сетки. Если в процессе измельчения сетки число T , а также $s = 2/T$, остаются неизменными, то число (3.10) дает представление о необходимом числе ячеек памяти для продвижения на один шаг по времени. Действительно, для вычисления приближенного значения решения в соответствии с первым алгоритмом нужно сосчитать $s+1$ слагаемое $u_n(l-s,T),\dots,u_n(l,T)$, из которых первое самое трудоемкое.

Число арифметических операций для продвижения на один шаг по времени получается умножением числа ячеек памяти на число q операций для расчета одной точки на верхнем слое по известным значениям решения на двух предыдущих временных слоях.

Второй алгоритм. Второй алгоритм отличается от первого тем, что вместо представления решения $u(\bar{x},t)$, $\bar{x} \in S_1$, по формуле (2.32) используется формула (2.33), которую можно записать в виде

$$u(\bar{x},t) = v_{l-s}(\bar{x},t,T,z) + \ldots + v_l(\bar{x},t,T,z). \tag{3.11}$$

Число z выбирается в соответствии с (2.28), т.е. $z \geq T+2$. Для получения второго алгоритма слагаемые $v_{l-s}(\bar{x},t,T,z),\dots,v_l(\bar{x},t,T,z)$, то есть решение системы (2.25)–(2.27), заменяется в точках сетки решениями аппроксимирующих разностных задач. Уравнение (2.25) заменяется разностным

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}v_n(j,T,z) = f_m(j,T,z), \quad \max | m_k h | < z, \qquad k=1,2,3; \tag{3.12}$$

начальные условия (2.26) – условиями

$$v_n(j,T,z) \equiv 0, \qquad n_4\tau \leq (j-1)T+\tau; \tag{3.13}$$

краевые условия (2.27) – условиями

$$v_n(j,T,z) = 0, \tag{3.14}$$

если

$$\max_{k=1,2,3} | n_k h | = z.$$

Мы считаем здесь, что z и h выбраны так, что z/h есть целое число. Расчетная формула второго алгоритма имеет вид

$$u(n_1h,n_2h,n_3h,n_4\tau) \approx v_n(l-s,T,z) + \ldots + v_n(l,T,z), \tag{3.15}$$

если

$$(l-1)T \leq n_4\tau < lT. \tag{3.16}$$

Второй алгоритм несколько экономнее первого. Действительно, число точек сетки, вовлеченных в расчет на одном слое по времени, есть число

$$\left(\frac{z}{h}\right)^3 \approx \left(\frac{2+T}{h}\right)^3 \qquad (3.17)$$

точек сетки, попавших в куб $\mid x_k \mid < z, \quad k = 1,2,3$. Это число несколько меньше, чем число (3.10).

Если $T \approx 2$, то первый и второй алгоритмы для вычисления решения задачи (1.1), (1.2) вряд ли можно существенно улучшить. Но мы хотели бы иметь возможность экспериментировать и с такими разложениями единицы (2.10), в которых T может уменьшаться одновременно с измельчением сетки. В этом случае число слагаемых $s+1 = 2/T+2$ в формулах (3.5) и (3.11) неограниченно возрастает. Если бы было $T = O(\tau^{1-\delta})$, $\delta > 0$, то объем памяти и число арифметических операций при расчетах по первому или второму алгоритмам имели бы порядок $O(h^{-4+\delta})$ вместо неулучшаемого $O(h^{-3})$.

Третий алгоритм использует в точности те же приближения на каждом слое по времени, что и второй. Однако вычисления в нем организованы существенно иначе. В третьем алгоритме порядок числа используемых ячеек памяти и порядок числа арифметических операций остаются $O(h^{-3})$, даже если $T = T(h)$ уменьшается при $h \to 0$, но не слишком быстро, так что

$$T \geq \tau \cdot \mid \mathrm{lnh} \mid .$$

Для описания третьего алгоритма введем сеточную функцию $V_n(l,s,T,z)$, зависящую от целого l как от параметра:

$$V_n(l,s,T,z) = \sum_{k=l-s}^{\infty} v_n(k,T,z), \qquad (3.18)$$

где $v_n(k,T,z)$ – решение задачи (3.12)–(3.14) при $j = k$. Здесь s – целое число, которое входит в приближенную формулу (3.15). Заметим, что для каждого $n = (n_1h, n_2h, n_3h, n_4\tau)$ только несколько членов ряда в правой части (3.18) отличны от нуля. Для тех точек $n = (n_1h, n_2h, n_3h, n_4\tau)$, которые лежат на временных слоях сетки

$$t = n_4\tau, \quad n_4 = \frac{(l-1)T}{\tau}, \ \frac{(l-1)T}{\tau}+1, \ldots, \frac{lT}{\tau}-1, \qquad (3.19)$$

сумма (3.18) совпадает в силу (3.15), (3.16) с тем приближением искомого решения, которое используется в точках $(n_1h)^2 + (n_2h)^2 + (n_3h)^2 \leq 1$ во втором алгоритме. Таким образом, вычисление приближения по формуле (3.15) при $n = (n_1h, n_2h, n_3h, n_4\tau)$ можно понимать как вычисление $V_n(l,s,T,z)$ при соответствующем в силу (3.16) значении l.

Подставляя $V_n(l,s,T,z)$ в левую часть уравнения (3.12), в силу линейности уравнения (3.12) получим

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} V_n(l,s,T,z) =$$

$$= f_m(l-s,T,z) + f_m(l-s+1,T,z) + \ldots + f_m(l,T,z) + \ldots . \qquad (3.20)$$

В силу определения (2.10) функции $\Psi(t)$ и формулы (2.13) видно, что имеет место равенство

$$f(m_1h, m_2h, m_3h, m_4\tau) = \sum_{k=l-s}^{\infty} f_m(k, T, z) \tag{3.21}$$

для всех тех m, для которых

$$m_4\tau \geq (l-s)T. \tag{3.22}$$

В силу (3.21) и (3.22) функция $V_n(l, s, T, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}V_n(l, s, T, z) = f_m \tag{3.23}$$

для тех m, для которых выполнено (3.22) Предположим теперь, что при некотором натуральном l мы уже знаем значения $V_n(l, s, T, z)$ на первых двух слоях (3.19), т.е. при $n_4 = (l-1)T/\tau$ и $n_4 = (l-1)T/\tau + 1$.

Мы опишем вычисление $V_n(l, s, T, z)$ на остальных слоях (3.19) и вычисление $V_n(l+1, s, T, z)$ при $n_4 = lT/\tau$ и $n_4 = lT/\tau + 1$. Этим самым будет завершен цикл перехода от использования $V_n(l, s, T, z)$ для вычисления приближения на слоях (3.19) к использованию функции $V_n(l+1, s, T, z)$ для последовательного вычисления приближений на слоях

$$t = n_4\tau, \quad n_4 = \frac{lT}{\tau}, \quad \frac{lT}{\tau} + 1, \ldots, \frac{(l+1)T}{\tau} - 1.$$

Используя известные по предположению значения $V_n(l, s, T, z)$ на первых двух временных слоях

$$t = n_4\tau, \quad n_4 = \frac{(l-1)T}{\tau} \text{ и } n_4 = \frac{(l-1)T}{\tau} + 1,$$

можно вычислить слой за слоем значения $V_n(l, s, T, z)$ на остальных временных слоях из группы (3.19), т.е. при $n_4 = (l-T)/\tau + 2, \ldots, lT/\tau - 1$. Это можно сделать с помощью явной трехслойной разностной схемы (3.20) с правой частью (3.21).

Количество арифметических операций для вычисления $V_n(k, s, T, z)$ на очередном слое по времени есть

$$q\,(z/h)^3\,, \tag{3.24}$$

где q – число операций для расчета решения в одной точке.

Вычисление $V_n(l+1, s, T, z)$ при $n_4 = lT/\tau$ и $n_4 = lT/\tau + 1$ можно осуществить, используя очевидную формулу

$$V_n(l+1, s, T, z) = V_n(l, s, T, z) - v_n(l-s, T, z). \tag{3.25}$$

Уменьшаемое в правой части формулы (3.25) при $n_4 = lT/\tau$ и $n_4 = lT/\tau + 1$ вычисляются в силу (3.20) с правой частью (3.21). Число операций для перехода на один слой по прежнему задается (3.24). Вычитаемое $v_n(l-s, T, z)$ является решением задачи (3.12)–(3.14) при $j = l - s$. Правая часть этой задачи может отличаться от нуля только для тех $m = (m_1h, m_2h, m_3h, m_4\tau)$, для которых

$$(l - s - 1)T \le m_4\tau \le (l - s + 1)T.$$

Начальные данные для $v_n(l-s,T,z)$ – нулевые. Вычисление решения $v_n(l-s,T,z)$ при $n_4 = lT/\tau + 1$ разобъем на два этапа. Сначала шаг за шагом вычисляем решение $v_n(l-s,T,z)$ в силу трехслойной схемы (3.12) при

$$n_4 = \frac{(l-s-1)T}{\tau}, \ldots, \frac{(l-s+1)}{\tau}T.$$

Вычисление решения на этих $2T/\tau + 1$ слоях требует

$$O\left[(2q2T/\tau)\cdot(z/h)^3\right] \tag{3.26}$$

операций. Значения решения $v_n(l-s,T,z)$ на слоях

$$n_4 = \frac{(l-s+1)T}{\tau} - 1 \ \text{ и } \ n_4 = \frac{(l-s+1)T}{\tau} \tag{3.27}$$

используем в качестве начальных данных для вычисления решения $v_n(l-s,T,z)$ при $n_4 = lT/\tau$ и $n_4 = lT/\tau + 1$.

При этом мы используем то обстоятельство, что $f_m \equiv 0$ при $m_4 \ge$ $\ge (l-s+1)T/\tau$. Потому решение $v_n(l-s,T,z)$ можно записать в виде конечного ряда. Но решение разностного аналога задачи Коши для волнового уравнения при нулевой правой части и нулевых краевых условиях, заданных на сторонах куба $\max\limits_{k=1,2,3} \mid n_kh \mid= z$, можно вычислять, записывая решение в виде конечного ряда Фурье по системе синусов. В силу известных алгоритмов с использованием *быстрого преобразования Фурье* (см., например, [3]), это потребует

$$O(h^{-3}\text{lnh}) \tag{3.28}$$

операций.

Итак, общее число арифметических операций для вычисления функции (3.25) при $n_4 = lT/\tau$ и $n_4 = lT/\tau + 1$ в силу (3.26) и (3.28) составляет

$$O\left[(2qT/\tau)\cdot(z/h)^3\right] + O(h^{-3}\text{lnh}). \tag{3.29}$$

Вычисление функции $V_n(l+1,s,T,z)$ при $n_4 = lT/\tau$ и $n_4 = lT/\tau + 1$ приходится осуществлять только один раз для каждой серии временных слоев (3.19), число которых T/τ. Поэтому в силу (3.29) в расчете на один слой количество операций составляет

$$O\left[2q\,(z/h)^3\right] + \left(\tau h^{-3}\text{lnh}/T\right). \tag{3.30}$$

Если $T = \tau \mid \text{lnh} \mid$, то (3.30) есть число, имеющее порядок $O(h^{-3})$. Итак, порядок числа операций для реализации третьего алгоритма при переходе на один слой по времени составляет в среднем $O(h^{-3})$ операций, если $T > \tau/\mid \text{lnh} \mid$. Если $T = \tau$, то этот порядок был бы $O(h^{-3}\text{lnh})$.

4

. Возможные обобщения

Предположенные выше алгоритмы расчета решений 3D–волнового уравнения на больших временах в ограниченной области в случае ограниченного носителя правой части основаны на наличии лакун. Эти алгоритмы можно перенести на случай расчета решений нестационарных систем Максвелла и Ламе, используя лакуны этих систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.А.Самарский.* Теория разностных схем, – М., Наука, Гл.ред.физ.-мат.литературы, 1983.
2. *С.К. Годунов.* Уравнения математической физики, – М.: Наука, 1971.
3. *Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М.,Кобельков.* Численные методы, Гл.ред. физ.-мат. литературы, 1987.

Поступила в редакцию
28.06.99.