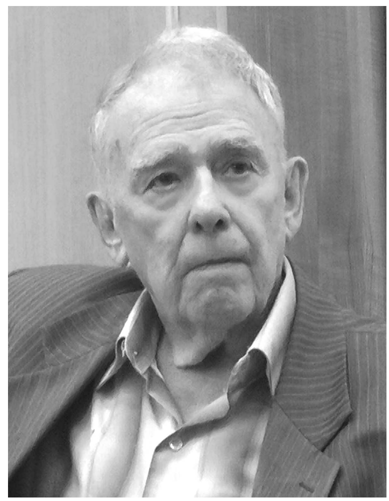
2015 г. ноябрь — декабрь *т. 70, вып. 6 (426)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Виктор Соломонович Рябенький и его школа

(к 90-летию со дня рождения)



20 марта 2013 г. исполнилось 90 лет профессору Виктору Соломоновичу Рябенькому, доктору физико-математических наук, крупнейшему специалисту в области вычислительной математики.

Виктор Соломонович родился в Москве в семье служащих Соломона Абрамовича и Берты Павловны Рябеньких. В 1940 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ, но обучение прервала война. Побывав несколько раз на волоске от смерти и встретив Победу в звании гвардии сержанта, механик-водитель Рябенький вернулся на родной мехмат, с успехом окончил его в 1949 г. и был принят в аспирантуру. Талант будущего классика отечественной вычислительной математики был замечен и поддержан Иваном Георгиевичем Петровским – выдающимся математиком и организатором науки, под руководством которого Виктор Соломонович работал сначала над дипломом, а затем и над кандидатской диссертацией. Именно эта диссертация с длинным и в те годы узкоспециальным названием "Об устойчивости конечно-разностных схем и о применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для систем уравнений с частными производными", защищенная в МГУ в 1952 г., открыла вычислительному сообществу новое имя и через некоторое время по праву позволила вписать Виктора Соломоновича Рябенького в славную когорту основателей теории разностных схем.

Так сложилось, что молодой специалист В. С. Рябенький начал свой трудовой путь практически в одно время с образованием секретного в то время Отделения прикладной математики (ОПМ), являвшегося тогда подразделением Математического института. Возглавлял отделение Мстислав Всеволодович Келдыш – блистательный математик, механик и государственный человек, ставший в пятидесятилетнем возрасте Президентом академии наук СССР (1961–1975). ОПМ, созданное для решения вычислительных задач, связанных с атомной и термоядерной энергетикой, исследованием космического пространства и др., разрасталось благодаря привлечению молодых талантливых ученых. М. В. Келдыш брал на работу тех и только тех, кто действительно мог справиться с абсолютно новыми для математики и физики задачами. Был замечен и Виктор Соломонович, работавший тогда во Всесоюзном заочном институте железнодорожного транспорта. Он был приглашен в 1957 г. по рекомендации Сергея

DOI: 10.4213/rm9676

Всеволодовича Яблонского в расчетное бюро ОПМ. Именно в Институте прикладной математики (ИПМ) им. М. В. Келдыша РАН – современное название ОПМ – В. С. Рябенький окончательно сформировался как ученый, получивший мировое признание, и продолжающий по сей день плодотворно заниматься научными исследованиями.

Развитием результатов кандидатской диссертации стала написанная Виктором Соломоновичем совместно с его ровесником, будущим известным специалистом по дифференциальным уравнениям Алексеем Федоровичем Филипповым монография [1] – теперь уже общепризнанное классическое исследование, фактически первая в мире книга об устойчивости разностных схем. Вычислительная математика, наука столь же древняя, как и сама математика, в те годы переживала свое второе рождение. Массовые расчеты с использованием "разностных схем" при решении задач, связанных с ядерной проблемой, с освоением космоса, с самолетостроением и т. д., проводимые как на электромеханических арифмометрах, так и на первых ЭВМ, привели к коренному пересмотру и переоценке сложившихся представлений о методах приближенных вычислений. Число точек сетки по пространству в дискретных моделях стало существенно превышать десятки и сотни (сейчас уже не удивляют объемы в 10^{10} точек). Это потребовало разработки соответствующей теоретической базы вычислительных алгоритмов. Настоящим проклятием для вычислителей была (и остается) неустойчивость численного решения, проявляющаяся в быстром нефизичном росте искомой функции в одной или сразу многих точках, причем как в динамических задачах, так и в стационарных, решаемых методами релаксации. Поэтому теория и рецепты, предложенные в [1], оказались для специалистов как нельзя кстати. При этом В. С. Рябенький (как и, по-видимому, А. Ф. Филиппов) в то время не имел никакого отношения к практическим расчетам: будучи "чистым" математиком, он рассмотрел разностную схему как некую абстрактную модель и смог найти и исследовать все основные особенности поведения этой модели. Это яркий пример глубокой врожденной математической интуиции, пронизывающей все научные результаты Виктора Соломоновича.

Конечно, работы по исследованию разностных уравнений велись уже задолго до выхода книги [1]. Например, замечательная работа Р. Куранта, К. Фридрихса и Г. Леви 1928 г. [2] была переведена в журнале "Успехи математических наук" еще до войны. Но это были лишь эпизодические, "не модные" публикации, в том числе из-за естественных причин "закрытости" практических расчетов и использования первых ЭВМ, к которым допускался строго ограниченный круг специалистов. Этим, по-видимому, объясняется и то, что блестящий математик Питер Лакс (Peter Lax), работая в 1940–1950-е годы эпизодически в Лос-Аламосской лаборатории по Манхэттенскому проекту и тоже занимаясь исследованием вопросов решения краевых задач с помощью конечно-разностных аппроксимаций, опубликовал свою теорию только в 1956 г. [3]. Жаргонная, но легко запоминаемая студентами формулировка одного из основных результатов работ [1], [3] – "из аппроксимации и устойчивости следует сходимость" – имеет сегодня несколько названий: теорема Рябенького, теорема Рябенького–Филиппова, теорема Лакса, теорема Лакса–Рябенького.

Надо отметить, что в ИПМ в те годы сформировались коллективы ученых для работ по многим "закрытым" прикладным проблемам, требующих зачастую решения очень схожих теоретических вопросов, составивших впоследствии основы многих численных методов. Обмен "открытыми" результатами и жаркие обсуждения происходили на научных семинарах и защитах диссертаций. Безусловно, это вносило дух соревновательности, тем более что один из отделов, где тоже велись исследования по теории устойчивости разностных схем, возглавлял блестящий ученый Александр Андреевич Самарский – будущий академик РАН, организатор науки, крупнейший специалист в области вычислительной математики, математической физики, теории математического моделирования. У Виктора Соломоновича и Александра Андреевича сложились долгие доверительные отношения двух математиков, дороживших мнением друг друга, особенно, когда речь шла о научных результатах. Возможно, этому способствовало и то, что оба они ушли добровольцами на фронт со студенческой скамьи – рядовым и ополченцем, и, чудом оставшись в живых, снова вернулись в свой родной МГУ. Вспоминается рассказ Виктора Соломоновича о том, что, уже будучи солидными и признанными учеными, пересекаясь в столовой или в коридорах ИПМ, они иногда интересовались друг у друга знаком производной “дэ пэ по дэ тэ”; величина “пэ” означала размер живота (“пузо”), “тэ”, естественно, время.

Начальный этап работы Виктора Соломоновича в ИПМ проходил в тесном сотрудничестве с талантливейшим коллегой Сергеем Константиновичем Годуновым, будущим академиком РАН, выдающимся математиком и механиком. Ими была предпринята попытка теоретического осмысления и оформления опыта численного решения сложных задач математической физики, накопленного к тому времени в ряде отделов ИПМ. Результатом этого научного сотрудничества стала также получившая широкую известность монография [4]. Ее дополненное переиздание [5] и по сей день является одним из основных введений в предмет. Главное научное содержание предложенной теории концентрируется вокруг фундаментального понятия устойчивости вычислительных алгоритмов. Опираясь на четкие математические определения аппроксимации и устойчивости и разъясняя примерами их содержательный смысл, они выработали систему классификации, отбора и рецепты построения разностных схем для типичных задач математической физики. При этом, помимо уже “традиционного” анализа устойчивости в духе признака Куранта–Фридрихса–Леви, в монографии был представлен анализ асимптотического накопления вычислительных погрешностей в эволюционных разностных схемах, поскольку уже тогда практические расчеты велись с таким количеством операций, что эти асимптотические свойства кардинально влияли на пригодность того или иного алгоритма. Отличительной особенностью стали также результаты анализа влияния краевых условий на устойчивость разностных схем. Начало этих трудных и тонких исследований было мотивировано результатами великолепных математиков Израиля Моисеевича Гельфанда и Константина Ивановича Бабенко, представленными на конференции в 1956 г., в которых были намечены контуры будущей теории. Однако последовательное проведение предложенной ими точки зрения оказалось непростым делом. Лишь в результате введения таких новых и непривычных объектов, как “спектр семейства операторов” (возник во время дискуссий с И. М. Гельфандом, К. И. Бабенко и замечательным математиком Эммануилом Эльевичем Шнолем [6]), а затем и “ядро спектра семейства операторов” [5], С. К. Годунову и В. С. Рябенькому удалось придать стройность и конструктивность теории, получить законченные результаты.

Следует отметить, что написанию книги [5] предшествовал достаточно большой период, около семи лет, во время которого происходило сближение мировоззрений обоих авторов. Это был период совместной напряженной работы, во время которой преодолевалось большое количество разногласий по пониманию тех или иных экспериментальных приемов, использовавшихся уже несколько лет в многочисленных расчетах весьма разнообразных физических явлений. Дело в том, что далеко не всегда моделям этих явлений удавалось придавать форму хорошо поставленных математических задач. В таких случаях приходилось идти на компромиссы, несколько упрощающие решаемые задачи, или отказываться от обсуждения проблем, для которых постановки четких математических задач еще не были завершены. Развитие намеченных тогда понятий было иногда совсем неожиданным. Так, например, понятие спектра семейства разностных операторов в дальнейшем послужило поводом для введения понятия спектральных портретов матриц [7][1].

Вопрос точности разностных аппроксимаций обобщенных разрывных решений нелинейных гиперболических уравнений (например, при расчете ударных волн в газовой динамике) был и остается ключевым в теории разностных схем. В 1958 г. С. К. Годунов и В. С. Рябенький провели с помощью вычислительницы Натальи Михайловны Гоманьковой ряд численных экспериментов, чтобы "наконец" разобраться с этим вопросом. Сергей Константинович вспоминает:

"Эти эксперименты привели к результатам, поставившим нас в тупик. Моя разностная схема с распадами разрывов[2], имеющая на гладких решениях первый порядок точности $O(h)$, обеспечивала при расчете "обобщенных" решений с ударными волнами погрешность лишь порядка $O(\sqrt{h}\,)$. Мы рассказали об этом на одной из научных конференций, проходившей в МГУ, но не нашли в то время возможности представить эти эксперименты в виде статьи. Тем не менее интерес к анализу точности в подобных расчетах снова возник и стал активно развиваться уже в семидесятые годы. Появилось большое число разнообразных расчетных методов повышенной точности. Я был знаком с многими изобретателями этих методов, но во время дискуссий с ними мне так и не удалось выяснить, что они понимают под "порядком точности", тогда как в наших исследованиях мы опирались, по примеру Сергея Львовича Соболева, на понятие слабой сходимости. Все эти исследования высокоточных схем и мои встречи с их авторами происходили в то время, когда я занимался совсем другими вопросами, и поэтому я не стал детально вникать в анализ используемых приемов. В 1997 г. меня пригласили в Мичиганский университет, и я выступил с лекцией "Воспоминания о разностных схемах". При ее подготовке один из новосибирских математиков, Владимир Викторович Остапенко, по моей просьбе повторил наше с В. С. Рябеньким исследование, применив его к схеме Лакса–Хартена повышенного порядка точности, и, тем самым, продемонстрировал, что, с нашей точки зрения, там повышения точности не наблюдается. Я представил текст моего доклада, изданного в виде препринта на русском языке, и мне пообещали его перевести и опубликовать в "Journal of Computational Physics". Это произошло через два года, но при этом текст был сокращен и из него оказались удалены контрпримеры, построенные В. В. Остапенко.[3] В 2011 г. я вместе с М. Назарьевой и Ю. Манузиной, выполнявшими под моим руководством магистерскую диссертацию, провел анализ слабой сходимости в численных экспериментах, основанных на моей классической схеме, т. е. аккуратно повторил наши с В. С. Рябеньким исследования 1958 г. на существенно большем числе примеров. Опять-таки, мы получили меньшие скорости слабой сходимости. Наши результаты [9] не встретили каких-либо замечаний, хотя мы ожидали бурных дискуссий. В последнее время в Новосибирске у меня нашлись коллеги, некоторые из которых проводят многочисленные очень тонкие расчеты по современным схемам повышенной точности, другие совместно со мной занимались моделированием упруго-пластических процессов. Нам удалось организовать широкое обсуждение вопросов точности и проведения соответствующих вычислительных экспериментов. Кажется, мы стали нащупывать пути преодоления затруднений в нашем понимании проблемы, и рассчитываем довести наши точки зрения до публикации. Буду надеяться, что отпущенного мне судьбой жизненного времени хватит, чтобы в этой публикации поучаствовать и, тем самым,

---

[1] См. также [8], где описаны полученные независимо аналогичные понятия.

[2] Классическая "схема Годунова".

[3] Полный английский перевод доклада опубликован в октябре 2008 г. во Франции в виде препринта № 6666 INRIA "Reminiscences about numerical schemes".

завершить разбор проблем, с которыми мы вместе с В. С. Рябеньким столкнулись в конце 1950-х годов".

Интересным оказался вклад В. С. Рябенького в задачи интерполяции. Для анализа устойчивости систем разностных уравнений по начальным условиям он сконструировал алгоритм локального полиномиального восполнения сеточной функции с заданной гладкостью. Затем на основе этого алгоритма был построен метод гладкой локальной интерполяции на неравномерных прямоугольных сетках, известный как "локальные сплайны Рябенького" и применяемый в ряде вычислительных алгоритмов и в теории.

Завершая описание научных исследований Виктора Соломоновича 1950-х–начала 1960-х, можно сказать, что монографиями [1], [4], [5] были по существу определены основные направления теоретического анализа разностных схем – важнейшего объекта вычислительной математики и инструмента современного математического моделирования. Учебник [5] интересен еще и тем, что там приведены библиографические комментарии, раскрывающие истоки многих направлений, ставших уже классическими разделами вычислительной математики.

Следующий этап научного творчества Виктора Соломоновича, продолжающийся и по сей день, дал вычислительной математике новое понятие – разностный потенциал (РП), а также целую гамму приложений РП – от численных методов решения краевых задач математической физики до алгоритмов активного экранирования шума. Рассматривая далее основные вехи становления теории РП, мы, конечно, придерживаемся разумных ограничений в строгости изложения. Все детали заинтересованный читатель может найти в цитируемых ниже статьях и монографиях.

Все началось с докторской диссертации "Некоторые вопросы теории разностных краевых задач", защищенной В. С. Рябеньким в 1969 г. [10]. Взяв за исходный объект произвольный разностный оператор A с постоянными коэффициентами, возникающий, например, из аппроксимации некоторого эллиптического дифференциального оператора, Виктор Соломонович ввел понятие (многослойной) *сеточной границы* γ некоторой сеточной области M и построил совершенно новые для разностных задач объекты Pu_γ – сверточные суммы разностного фундаментального решения оператора A с рассматриваемыми на γ сеточными функциями u_γ (здесь и далее для обозначения операции взятия следа функций на множестве скажем, S, мы используем нижний индекс "$_S$", т. е. $u_S \equiv u\big|_S$). Оказалось, что изобретенные формулы являются разностными аналогами интегралов Коши и типа Коши, так как они a) производят все решения однородного уравнения $Au_{\overline{M}} = 0_M$, $\overline{M} = M \cup \gamma$, и b) определяют *разностные граничные проекторы* P_γ при сужении P на подпространство функций с носителем на γ согласно $P_\gamma u_\gamma \equiv (Pu_\gamma)_\gamma$. Тем самым, короткая запись $P_\gamma u_\gamma - u_\gamma = 0$, названная *внутренними граничными условиями*, является полным разностным аналогом интегрального соотношения Сохоцкого–Племеля (напомним, что это соотношение выделяет класс функций на границе, которые можно доопределить всюду в области до аналитической функции). Благодаря этому соотношению удалось эквивалентным образом свести краевую разностную задачу для оператора A, формулируемую в области $\overline{M}$, к сеточным уравнениям на границе γ:

$$\begin{cases} P_\gamma u_\gamma - u_\gamma = \psi, \\ Bu_\gamma = \varphi; \end{cases} \tag{1}$$

здесь второе уравнение соответствует граничным условиям исходной разностной краевой задачи (например, условиям Дирихле).

Не будет преувеличением сказать, что оператор P, названный впоследствии оператором *разностного потенциала* и обобщенный на переменные коэффициенты и эволюционные задачи, стал основным объектом теоретических и прикладных исследований В. С. Рябенького и его школы, среди которых и вопросы алгебраического формализма теории разностного и классического потенциала, и анализ аппроксимационных свойств оператора P, и подходы экономного вычисления функции Pu_γ, и методы эффективного решения различных краевых задач математической физики на основе редукции вида (1), и применение идеологии РП к проблемам построения неотражающих граничных условий, активной защиты от шума и многое другое. Уместно упомянуть, что Виктор Соломонович обычно начинает свои лекции о методе РП следующим образом:

"Прообразом разностного потенциала является интеграл типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\rho_\Gamma(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad z\notin\Gamma,$$

определенный на пространстве кусочно гладких комплекснозначных функций со скачком на замкнутом контуре Γ, который разбивает комплексную плоскость на некоторую ограниченную подобласть Ω^+ и ее дополнение. Этот интеграл можно интерпретировать как потенциал дифференциального оператора Коши–Римана $\partial/\partial\overline{z}$, причем функция $\rho_\Gamma(\zeta)$, $\zeta\in\Gamma$, играет роль плотности потенциала. Уникальным свойством этого потенциала (в отличие от потенциалов простого и двойного слоя для операторов Лапласа, Гельмгольца, Ламэ, Стокса, Максвелла и др.) является то, что в его конструкцию входят граничные *проекторы* P_Γ^+ и P_Γ^-, определенные формулами

$$P_\Gamma^+\rho_\Gamma(\zeta):=\frac{1}{2}\rho_\Gamma(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\rho_\Gamma(\eta)}{\zeta-\eta}\,d\eta,$$

$$P_\Gamma^-\rho_\Gamma(\zeta):=\frac{1}{2}\rho_\Gamma(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\rho_\Gamma(\eta)}{\zeta-\eta}\,d\eta.$$

Сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения.

Пусть $f(z)$ – кусочно непрерывная аналитическая функция, стремящаяся к нулю при $z\to\infty$ и претерпевающая скачок на контуре Γ. Далее, пусть $f_\Gamma^+(\zeta)$ и $f_\Gamma^-(\zeta)$ – пределы (следы) функции $f(z)$ при стремлении z к точке ζ, лежащей на контуре Γ, изнутри и извне Ω^+ соответственно. Тогда, как известно, проекторы P_Γ^+ и P_Γ^- позволяют по сумме $f_\Gamma=f_\Gamma^++f_\Gamma^-$ находить каждое слагаемое по формулам: $f_\Gamma^+=P_\Gamma^+f_\Gamma$ и $f_\Gamma^-=P_\Gamma^-f_\Gamma$.

Потенциалы линейных разностных операторов общего вида ("потенциалы Рябенького". – Ред.), будучи проекторами в пространстве плотностей на сеточной границе, сочетают отмеченные уникальные свойства интеграла типа Коши с универсальностью и алгоритмичностью разностных схем.

Эта и есть коренная основа большинства новых возможностей, которые доставляет *метод разностных потенциалов* – МРП".

Вернемся опять ко времени изобретения РП. Отчетливо понимая, какое идейно и содержательно богатое направление вычислительной математики открывается при исследованиях новых объектов, Виктор Соломонович стал привлекать студентов МФТИ к этой работе. Первым таким студентом стал А. Я. Белянков (МФТИ, диплом 1970 г.), рассмотревший в дипломе и в последующих работах, в частности в кандидатской диссертации [11], алгебраическую сторону конструкции оператора P. В результате вместе с В. С. Рябеньким им был построен разностный аналог аппарата сингулярных интегральных уравнений в теории разностных краевых задач. В частности, в [11] была указана запись РП в форме

$$Pu_{\overline{M}}:=u_{\overline{M}}-\bigl(F(Au_{\overline{M}})_M\bigr)_{\overline{M}}, \tag{2}$$

где F – разностный оператор Грина для A в некоторой объемлющей области $M_0 \supset \overline{M}$, т. е. $FAu_{M_0} \equiv u_{M_0}$. Эта форма оказалась очень удобной для дальнейшего развития теории РП. Одним из ее основных свойств является то, что результат зависит от значений функции $u_{\overline{M}}$ только на множестве точек $\gamma \subset \overline{M}$.

На рис. 1 показан пример областей M, γ и M_0 для двумерного разностного эллиптического оператора A второго порядка с обычным пятиточечным шаблоном типа крест.

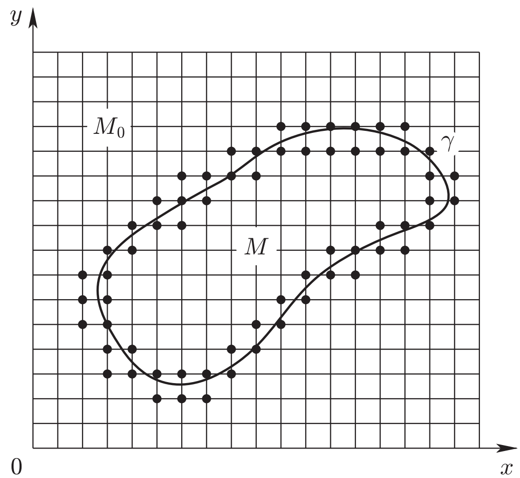


Рис. 1. Области M (точки сетки внутри контура), M_0 (сеточный квадрат) и граница γ (кружочки) для оператора A с пятиточечным шаблоном; $\overline{M} = M \cup \gamma$

Теорию аппроксимационных свойств РП при измельчении сетки, заложенную еще в [10], удалось существенно развить следующему ученику В. С. Рябенького – А. А. Celезнику (МФТИ, диплом 1979 г.)[4]. С помощью аппарата обобщенных функций он получил первые результаты по аппроксимации потенциалов эллиптических операторов общего вида в нормах пространств Гёльдера и пространств Соболева [12], [13]. В основе подхода аппроксимации эллиптических поверхностных потенциалов лежит несколько идей. Во-первых, "дополнительная идея" В. С. Рябенького, анонсированная им в 1976 г. на конференции, посвященной семидесятипятилетию академика И. Г. Петровского (см. [5; дополнение, п. 10]); точнее, та часть идеи, что связана с продолжением данных Коши на сеточную границу. Для определенности рассмотрим эллиптический оператор второго порядка L в некоторой односвязной замкнутой области Ω с достаточно гладкой границей Γ (примером Γ является контур на рис. 1). Алгоритм продолжения состоит в том, что для пары функций $\{\nu, \partial\nu/\partial n\}$, являющихся данными Коши на границе Γ некоторой функции ν, по формуле Тейлора строится функция u_γ в точках сеточной границы γ, соответствующей Γ:

$$u_a := \nu(b) + r\frac{\partial\nu}{\partial n}(b); \tag{3}$$

здесь $a \in \gamma$ – текущая точка на γ; $b \in \Gamma$ – основание нормали, опущенной из a на Γ; r – длина нормали с нужным знаком (знак определяется в зависимости от того, внешней или внутренней является точка a по отношению к области Ω). Уместно отметить, что при таком определении u_γ становится интуитивно понятен смысл многослойности

[4]К сожалению, Александр Анатольевич Резник, один из самых талантливых учеников Виктора Соломоновича, безвременно ушел из жизни в 1995 г.

границы γ: функции на ней позволяют сохранять информацию о всем векторе данных Коши на Г. Во-вторых, используется идея единообразной записи континуальных и разностных потенциалов в виде (2). Так, для потенциалов простого и двойного слоев,

$$w_{\overline{\Omega}} = 0.5\rho_0 - \int_\Gamma \left(G\rho_1 - \frac{\partial G}{\partial n}\rho_0 \right) d\Gamma, \tag{4}$$

с плотностями ρ_1, ρ_0 и функцией Грина G тождество Грина приводит к следующему представлению:

$$w_{\overline{\Omega}} = u_{\overline{\Omega}} - \big(G * (Lu_{\overline{\Omega}})_\Omega\big)_{\overline{\Omega}}, \tag{5}$$

где u – произвольная функция с данными Коши $\{\rho_0, \rho_1\}$, а $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Наконец, подключается третья идея, состоящая в том, что операцию свертки $G * f$ можно аппроксимировать путем решения вспомогательной разностной задачи

$$\begin{aligned} &Au = f_{M_0}, \\ &u \in U_0 \end{aligned} \tag{6}$$

в объемлющей области M_0; здесь U_0 – подпространство всех функций на M_0, удовлетворяющих некоторому однородному граничному условию.

Замечание 1. Подпространство U_0 определяет конкретную функцию Грина из множества всех возможных; например, однородное граничное условие Дирихле соответствует функции Грина задачи Дирихле в M_0, а более тонкие условия, как мы увидим ниже, могут соответствовать функции Грина свободного пространства, т. е. фундаментальному решению.

Собственно, теперь уже становится понятным алгоритм аппроксимации потенциалов (4) в точках $\overline{M}$: сначала нужно по формуле продолжения (3) построить на γ функцию u_γ для данных Коши $\{\rho_0, \rho_1\}$, а затем применить (2), переложив основные трудности на процесс решения задачи (6); функция $u_{\overline{M}}$ доопределяется нулем вне γ. Отсюда следует, что мы чудесным образом избегаем необходимости иметь явный вид функции Грина G и вычислять свертку с сингулярными ядрами в (4). Таким образом, решая (6), например, многосеточным методом Радия Петровича Федоренко [14] (который был большим другом Виктора Соломоновича, соседом по подъезду и по рабочему месту – их письменные столы стояли в одной комнате) или каким-либо другим “быстрым” численным методом, можно с той же степенью вычислительной эффективности аппроксимировать потенциалы для произвольных эллиптических операторов с переменными коэффициентами. Если в описанном выше алгоритме ограничиться только второй его частью, т. е. формулой (2), то мы получим не что иное, как алгоритм вычисления РП для произвольной сеточной функции, заданной на γ, причем без знания F.[5]

Замечание 2. Аппроксимационные свойства РП согласованы с порядком точности продолжения данных Коши на γ. Продолжение (3) является, очевидно, простейшим (нулевым) приближением решения задачи Коши в малой окрестности Г для уравнения $L\nu = 0$. Следующие по порядку приближения получаются добавлением новых членов ряда Тейлора, вычисляемых последовательно из условий $\partial^k/\partial n^k(L\nu) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, на основе касательных производных от данных Коши. Параметр k

[5] Такая конструкция стала уже классическим элементом теории РП. Однако, например, И. Л. Софронов вспоминает, как в студенческие годы, успев основательно погрузиться в теорию внутренних граничных условий и осознав всю сложность проблемы нахождения разностных фундаментальных решений, он впервые услышал от “шефа”, что теперь РП можно вычислять без предъявления последних. Эта новость произвела очень сильное впечатление, граничащее с сомнениями “такого не может быть”.

определяет индекс пространств Гёльдера и Соболева, в которых проводятся аппроксимационные оценки.

Значение изложенной выше схемы вычисления РП и механизма аппроксимации классических потенциалов, безусловно, сопоставимо по важности с самой идеей РП. Именно благодаря совместным усилиям В. С. Рябенького и его первых учеников А. Я. Белянкова и А. А. Резника по решению этих вопросов разностному потенциалу была открыта дорога в широкую вычислительную практику. Существенным моментом предложенных конструкций является то, что континуальные потенциалы аппроксимируются алгоритмически довольно естественно и рутинно, причем без необходимости привлечения функций Грина и вычисления сингулярных поверхностных интегралов.

Алгебраическая сторона конструкции РП красива и очень притягательна; на протяжении более чем сорока пяти лет с момента изобретения оператора P Виктор Соломонович периодически возвращается к этой теме. Важным элементом теории РП стало введение им понятия *четкого следа* для функции u_γ. Четкий след позволяет проводить параметризацию множества разностных потенциалов Pu_γ путем управления ядром оператора P (напомним, что P – проектор с ядром размерности, равной примерно половине числа точек γ). Как результат исследований В. С. Рябенького начала 1980-х годов, появилась конструкция и теория РП для общих линейных систем разностных уравнений на абстрактных сетках. С другой стороны, оказалось, что разработанный алгебраический формализм можно перенести и на линейные дифференциальные операторы и краевые задачи, т. е. "разностная" теория дала толчок развитию аналогичной "континуальной" теории (хотя, конечно, процесс обдумывания обоих формализмов шел у Виктора Соломоновича одновременно – первые публикации по ним, [15], [16], датируются одним и тем же 1983 г.). Это вылилось в создание на основе определения (5) общей конструкции поверхностных потенциалов и проекторов для дифференциальных операторов, которая представлена в развернутом виде в [17] (см. также [18]) и включает, как частные случаи, уравнения Сохоцкого–Племеля, граничные потенциалы (проекторы) Кальдерона–Сили, классические потенциалы и формулы Грина. Некоторое время спустя коллега и близкий друг Виктора Соломоновича М. И. Лазарев выделил алгебраическую сущность рассмотренных в [17] понятий четкого следа, потенциала с плотностью из пространства четких следов и граничных уравнений с проекторами. Он ввел частичную упорядоченность в множество всех возможных конструкций четких следов и определил понятие минимального четкого следа [19]. Недавно Виктор Соломонович опять вернулся к алгебре РП и предложил конструкции, позволяющие параметризовать семейство всех РП. Эти результаты являются еще одним шагом на пути формализации выбора РП, адекватного цели его использования.

Рассмотрим теперь некоторые области применения теории РП.

1) С самого начала изобретения использование РП было ориентировано на решение краевых задач математической физики. В. С. Рябенький с учениками и коллегами много лет работал над построением достаточно "универсальной" технологии, которая позволила бы на основе редукции (1) получать быстрые разностные алгоритмы на прямоугольных сетках для криволинейных областей. В начале 1980-х годов такая схема была, наконец, разработана, опробована на ряде задач в [13], [20] и опубликована в [21]. Опишем основные элементы и особенности этой схемы на примере краевой задачи

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{в } \Omega, \\ l\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial n}\right) = f & \text{на } \Gamma \end{cases} \tag{7}$$

для уже введенных выше оператора L и области Ω с криволинейной границей Γ; l может быть любым оператором граничных условий, лишь бы задача (7) была корректно поставлена. Сначала строим РП. Для этого погружаем область Ω в параллелепипед Ω_0 и вводим в Ω_0 равномерную прямоугольную сетку – область M_0, на которой оператор L аппроксимируем оператором A. С помощью формализма РП определяем сеточную границу γ и затем оператор P по формуле (2). Далее неизвестные функции u и $\partial u/\partial n$ представляем их значениями в точках некоторого множества (сетки) S на Γ; пусть эти значения образуют вектор $\overline{d}$. Восполняя $\overline{d}$ сплайнами на всей Γ до u и $\partial u/\partial n$, строим по формуле (3) оператор продолжения данных Коши с Γ на γ; полученный оператор обозначаем Π, т. е. $u_\gamma = \Pi\overline{d}$ (см. замечание 2 по вопросу точности). Наконец, снабжая пространства сеточных функций на γ и S евклидовыми нормами U_γ, U_S, включающими в себя суммы квадратов функций и, при необходимости, суммы квадратов их первых разностных производных, формулируем дискретную задачу по минимизации суммы двух невязок подбором соответствующего $\overline{d}$:

$$\|\Pi\overline{d} - P\Pi\overline{d}\|^2_{U_\gamma} + \big\|l\big|_S\overline{d} - f_S\big\|^2_{U_S} \to \min_{\overline{d}}. \tag{8}$$

Первое слагаемое отвечает выполнению внутренних граничных условий на γ (см. (1)), а второе аппроксимирует граничные условия на Γ. Задаче (8) соответствует, очевидно, уравнение Эйлера–Лагранжа – система линейных уравнений с самосопряженной матрицей. Решая эту систему методом сопряженных градиентов, находим искомые значения функций u и $\partial u/\partial n$ на S.

Перечислим основные свойства полученного алгоритма.

(i) Он действительно является универсальным по отношению к оператору l граничных условий, т. е. для различных типов l не нужно каждый раз разрабатывать способы их аппроксимации на прямоугольной сетке, способы включения их в разностную схему внутри области и способы эффективного решения полученной системы уравнений. Аппроксимация l для (8) происходит в точках исходной криволинейной границы.

(ii) Нет необходимости подстраивать прямоугольную сетку под криволинейную границу, так как связь между функциями на γ и S осуществляется единообразно конструктивным алгоритмом продолжения данных Коши, реализованным при построении оператора Π.

(iii) Разрешимость предельной задачи (8), получаемой при стремлении к нулю шагов сетки в M_0 и в S, эквивалентна разрешимости исходной задачи (7). Это важно, например, для случая уравнения Гельмгольца. Известно, что сведение краевых задач для уравнения Гельмгольца методом граничных интегральных уравнений (ГИУ) к уравнениям на границе может приводить к ситуации, когда на некоторых частотах полученный оператор ГИУ не имеет обратного (так называемые внутренние резонансы), хотя исходная краевая задача хорошо разрешима. В случае уравнения (8), которое, как и ГИУ, сводит исходную задачу в области к уравнениям на границе, такой проблемы не возникает. Дело в том, что РП (2) является, как уже отмечалось выше, аппроксимацией потенциала Кальдерона–Сили и поэтому позволяет задаче (8) сохранять свойства разрешимости исходной задачи.

(iv) Поведение числа обусловленности уравнения Эйлера–Лагранжа для (8) при уменьшении шагов сетки существенно зависит от норм U_γ, U_S. Теория эллиптических краевых задач подсказывает необходимость учета производных для построения "правильных" норм. Такой выбор норм позволяет избежать зависимости числа обусловленности, а следовательно, и скорости сходимости итерационного метода от шагов сетки.

(v) Основные затраты времени и памяти на каждой итерации определяются затратами решения (6) в M_0, т. е. соответствуют, например, многосеточному методу, если не применять еще более эффективного.

Замечание 3. Свойство (i) напрямую и достаточно глубоко связано с многослойностью границы γ сеточной области. Анализируя сильные и слабые стороны описанного выше алгоритма, И. Л. Софронов предложил другой подход [22] к решению регулярных эллиптических задач в криволинейных областях на прямоугольных сетках с помощью РП. В этом подходе исходная эллиптическая задача вначале преобразуется к уравнению с самосопряженным псевдодифференциальным оператором нулевого порядка в некотором гильбертовом пространстве, являющемся произведением весовых пространств Соболева. Затем полученный оператор аппроксимируется на прямоугольной сетке с искомыми функциями в точках множества $M \cup \gamma$, причем РП используются в качестве предобуславливателей, обеспечивая нулевой порядок соответствующего самосопряженного дискретного оператора в конечномерном гильбертовом пространстве.

2) Выбор подпространства U_0 на M_0 для вычисления РП (2) является существенной степенью свободы, которой можно умело распорядиться. Если говорить о внутренних задачах (ограниченная область Ω), то основным критерием является возможность надежного и быстрого решения задачи (6); поэтому мы уже указывали, что U_0, например, может соответствовать однородным условиям Дирихле. Однако при решении *внешних задач* желательно сконструировать U_0 таким образом, чтобы получить правильную асимптотику поведения РП на бесконечности. К работе над этими вопросами В. С. Рябенький привлек в 1982 г. своего следующего ученика И. Л. Софронова (МФТИ, диплом 1981 г.). В результате был реализован соответствующий РП и построен алгоритм решения внешних задач для уравнения Гельмгольца [20], [23]. В основу легла идея Виктора Соломоновича использовать для определения подпространства U_0 так называемые *парциальные условия*, получаемые на основе функций Ганкеля из известных представлений общего решения для уравнения Гельмгольца в дальнем поле в виде рядов Фурье по сферическим гармоникам. Областью Ω_0 в этих конструкциях является сфера или шаровой слой, а задача формулируется в сферических координатах.[6] Полученный РП аппроксимирует с нужной точностью решения уравнения Гельмгольца с условиями Зоммерфельда на бесконечности, а его вычисление является алгоритмически столь же простым, как для случая U_0, определяемого условием Дирихле.

Поставив цель распространить эти первоначальные результаты по конструкции РП для внешних задач на как можно более широкие классы задач, В. С. Рябенький разрабатывает впоследствии совершенно оригинальную концепцию построения *разностных операторов неотражающих искусственных граничных условий* (НИГУ) для стационарных задач на основе РП. В основе лежит, собственно, уже хорошо известный факт из теории РП: если γ – внешняя (открытая) граница сеточной расчетной области, то уравнение $(Pu_\gamma)_\gamma - u_\gamma = 0$ с оператором P, построенным на основе разностного фундаментального решения, как раз и будет одной из форм записи искомых НИГУ. Эти нелокальные соотношения для u_γ *эквивалентно* заменяют однородное уравнение для исходного разностного оператора на отброшенной бесконечной сеточной области,

[6] Отметим, что позднее такого рода условия усилиями многих исследователей получили существенное развитие и в теории неотражающих искусственных граничных условий стали называться DtN maps.

т. е. такие НИГУ являются *точными* в разностном смысле. Важными элементами концепции стали, во-первых, подход к экономному вычислению векторов $(Pu_\gamma)_\gamma$ и, во-вторых, более удобные для вычислений формы записи получаемых НИГУ. К реализации этих идей Виктор Соломонович приступил в конце 1980-х в совместных работах со следующим поколением своих учеников – С. В. Цынковым (МФТИ, диплом 1989 г.), М. Н. Мишковым (МФТИ, диплом 1991 г.), В. А. Торгашевым (МФТИ, диплом 1993 г.). В [24]–[30] была разработана технология *приближенного* вычисления векторов Pu_γ с предписываемым поведением на бесконечности для различных уравнений математической физики. Она использует принцип *предельного поглощения* путем добавления в исходные уравнения членов с малым параметром для выделения нужной асимптотики и сокращения размеров области M_0. Что касается форм записи НИГУ, удобных для встраивания в алгоритмы решения уравнений внутри расчетной области, то их можно получать из условия $(Pu_\gamma)_\gamma - u_\gamma = 0$, разбивая многослойную границу γ на внешний и внутренний слои и формируя оператор доопределения решения задачи на внешнем слое из значений на внутреннем слое.

Надо отметить, что затраты на построение нужных приближений в уравнении $(Pu_\gamma)_\gamma - u_\gamma = 0$ достаточно велики. Экономию ресурсов при вычислении и использовании РП может дать удачная параметризация пространства плотностей, позволяющая исключить ядро. Д. С. Каменецкий (МФТИ, диплом 1989 г.), также ученик В. С. Рябенького, рассмотрел вопросы однозначной параметризации множества решений общего однородного разностного уравнения с помощью РП с плотностями различного вида и исследовал способы построения так называемых независимых внутренних граничных условий и обобщенных разностных операторов Пуанкаре–Стеклова [31], [32]. Сюда примыкают и результаты С. В. Цынкова [33], где на примере двухслойной границы γ (см. рис. 1) выписаны плотности РП, аналогичные плотностям потенциалов простого и двойного слоя дифференциальных операторов второго порядка.

Важным соображением в пользу применения операторов НИГУ на основе РП является то, что они строятся, как правило, для многократных расчетов однотипных задач. Такие расчеты порождаются вариациями параметров, влияющих на уравнения строго внутри расчетной области и не требующих пересчета операторов НИГУ (например, изменение геометрии тела в задачах дифракции или обтекания, набор различных правых частей и т. п.). Поэтому определяющими становятся лишь вычислительные ресурсы во время применения уже построенных операторов, а они с лихвой “окупаются” высокой точностью НИГУ и резким сокращением размеров вычислительной области (по сравнению с привычными асимптотическими граничными условиями на бесконечности).

Показательным примером являются результаты С. В. Цынкова [34]–[39] по использованию предложенного совместно с В. С. Рябеньким подхода к построению НИГУ на основе РП для задач стационарного обтекания. Разработав необходимые НИГУ и реализовав их в кодах FLOMG и TLNS3D, созданных в NASA для научных и промышленных расчетов, он проверил их эффективность на многочисленных тестовых расчетах при вариациях геометрии обтекаемых объектов (профилей, крыльев и вытянутых тел с реактивной струей), числа Маха набегающего потока, размеров вычислительной области и ячеек сетки и т. д. Двумерный код FLOMG используется для интегрирования как полной системы Навье–Стокса, так и системы уравнений в приближении тонкого слоя. Код TLNS3D предназначен специально для уравнений тонкого слоя. Оба кода основаны на разностных схемах с симметричными разностями по пространственным переменным с искусственной диссипацией первого и третьего порядка. Стандартный способ постановки условий дальнего поля для обоих кодов FLOMG и TLNS3D состоит в использовании некоторых локальных соотношений на внешней границе. Этот способ опирается на предположение, что вдали от тела течение "почти одномерно", а также на соответствующий анализ входящих и выходящих характеристик, возникающих при введении времени (стационарное решение интерпретируют как результат установления). Проведенные С. В. Цынковым эксперименты показали, что новые НИГУ на основе РП не только всегда сокращают (вплоть до трех раз) время счета при сохранении точности, но и повышают устойчивость счета, приводя к стационарным решениям в тех случаях, когда вычисления по исходным кодам генерировали нефизичные осцилляции.

3) До сих пор мы фокусировались на эллиптических уравнениях математической физики, хотя теория РП охватывает и нестационарные задачи. В самом начале 1990-х В. С. Рябенький сформулировал основные конструкции НИГУ на основе РП для явных разностных схем [40] и предложил И. Л. Софронову рассмотреть случай волнового уравнения с постоянными коэффициентами, чтобы конкретизировать соответствующие построения. Первые результаты вычисления разностного фундаментального решения по стандартной центрально-разностной схеме второго порядка были обескураживающими: сильные осцилляции, отсутствие сеточной сходимости в окрестности фронта и т. п. Чтобы с этим разобраться, пришлось обратиться к аналитике, которая неожиданно привела к совсем другим решениям проблемы, а именно к разработке аналитических и квазианалитических *прозрачных граничных условий* (ПГУ).

ПГУ, предложенные И. Л. Софроновым в [41], [42] для волнового уравнения, имеют следующий вид на сфере и окружности ($d=3,2$):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial r}+0.5(d-1)\frac{u}{r}-Q^{-1}\{B_k^*\}Qu=0.$$

Здесь Q и Q^{-1} – операторы прямого и обратного преобразования Фурье по сферическому или тригонометрическому базису, а через $\{B_k^*\}$ обозначена диагональная матрица из операторов свертки по времени, действующая на вектор коэффициентов Фурье (k – номер компоненты). Ядра сверток, $\mathrm{B}_k(t)$, известны и для практического применения приближаются суммами экспонент:

$$\mathrm{B}_k(t)\approx\sum_{l=1}^{L_k}a_{l,k}e^{b_{l,k}t},\qquad \operatorname{Re}b_{l,k}\leqslant 0.$$

Такая формулировка позволяет при дискретизации ПГУ достигать любой точности за счет выбора нужного числа Фурье гармоник и соответствующих приближений $\mathrm{B}_k(t)$. В то же время она экономна по памяти и числу операций, поскольку свертка с экспонентами выполняется по рекуррентным формулам. ПГУ для некоторых других уравнений получили развитие в [43]–[46] и других работах. Для анизотропных и неоднородных сред разработаны квазианалитические ПГУ [47], [48], в которых соответствующая матрица $\{B_{k,l}^*\}$ уже полная, а ее элементы находятся численно. Предложены также аналитические усеченные ПГУ [49], в которых отсутствует оператор свертки по времени.

Вернемся к задаче построения разностного фундаментального решения для волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Ее все же удалось решить благодаря исследованиям В. И. Турчанинова [50]. Оказалось, что стоит только в правой части волнового уравнения вместо точечной дельта-функции взять след некоторой бесконечно гладкой финитной функции – "шапочки", имитирующей дельта-функцию, как разностное решение начинает сходиться к нулю вне фронта фундаментального решения, причем гораздо быстрее, чем диктует второй порядок разностной схемы. Таким образом, стало возможным использовать наличие лакун, присущее решениям волнового уравнения, и построить практически точные в разностном смысле НИГУ на внешней открытой границе расчетной области с фиксированными затратами памяти и числа операций при вычислении на каждом шаге по времени [51]–[54]. Эти затраты пропорциональны числу точек сетки в расчетной области, поскольку вспомогательная область для "обслуживания" НИГУ имеет фиксированный диаметр (примерно в три раза больший, чем исходная расчетная область).

В дальнейшем этот подход получил существенное развитие в работах С. В. Цынкова с коллегами для различных приложений [55]–[58] и был обобщен на случай квазилакун уравнений Максвелла, когда решение за задним фронтом волн является стационарным, но не обязательно нулевым [59], [60].

4) Вопросам эффективности вычисления РП Виктор Соломонович всегда уделял большое внимание. С появлением многопроцессорных систем степень распараллеливания вычислений стала важнейшей характеристикой алгоритмов. Использование прямоугольных сеток и конечных разностей в исходных формулировках РП позволяет весьма эффективно организовывать высокопроизводительные вычисления. В то же время традиционным подходом распараллеливания является декомпозиция физических и расчетных областей. Работу в этом направлении В. С. Рябенький начал в конце 1990-х годов вместе с В. И. Турчаниновым и своей ученицей Е. Ю. Эпштейн. Первые результаты подтвердили эффективность намеченного способа построения алгоритма решения задач методом РП в составной области. В предложенных алгоритмах [61], [62] для различных подобластей строятся свои (прямоугольные) сетки, не согласованные друг с другом. При этом краевые и интерфейсные условия аппроксимируются непосредственно на физических границах с использованием описанного выше оператора связи данных Коши с функциями на сеточных границах подобластей.

Еще одним резервом для экономии компьютерной памяти и числа операций является повышение порядка аппроксимации операторов разностных схем и, соответственно, операторов РП. Развивая метод РП в этом направлении, С. В. Цынков с коллегами разработали эффективные алгоритмы высокого порядка аппроксимации решения уравнения Гельмгольца [63]–[66] на основе ранее предложенных компактных схем четвертого порядка точности [67], [68]. Отметим, что привлекальность использованных компактных схем для РП заключается также в сохранении двухслойности границы γ – в отличие от четырехслойной сеточной границы γ для центрально-разностных схем четвертого порядка. Однако, как показано Е. Ю. Эпштейн с совторами [69], [70], при разработке алгоритмов с РП для составных областей на упомянутых центрально-разностных схемах, дополнительные слои γ не вносят принципиальных трудностей.

5) В начале 1990-х годов Алексей Валериевич Забродин, заведующий одним из отделов ИПМ, близкий друг В. С. Рябенького, стоявший у истоков разработки отечественных многопроцессорных вычислительных систем и параллельных вычислительных технологий, предложил Виктору Соломоновичу рассмотреть проблему активного экранирования физических полей. Эта тема сразу увлекла В. С. Рябенького, – он интуитивно почувствовал, что РП здесь могут оказаться весьма полезным инструментом. Ведь след функции на сеточной границе несет всю необходимую и достаточную информацию для восстановления в защищаемой области именно того поля, которое генерируется внешними источниками (а значит, теория РП позволяет это поле смоделировать, чтобы затем вычесть). Конечно, при создании своего алгоритма Виктор Соломонович думал прежде всего о практической реализуемости математической модели с помощью доступных физических устройств и измерений. Например, подходы, связанные с необходимостью использования информации о свой-

ствах среды внутри защищаемой области, сразу отбраковывались. Прошло несколько месяцев, пока были получены желаемые формулы, оказавшиеся настолько простыми, что трудно поверить в те возможности, которые они открывают. Эти первые теоретические результаты В. С. Рябенький опубликовал в двух коротких заметках [71], [72]. Они положили начало новому направлению в известной проблеме активной защиты заданной области пространства от влияния внешних источников шума и содержат основную конструкцию использования для этих целей разностных потенциалов типа Коши.

Рассмотрим для определенности *акустические поля* и будем называть "звуком" полезное поле в экранируемой области, а "шумом" паразитное поле, проникающее из примыкающей области через границу между этими областями (например, комната с окном, выходящим на шумную улицу). Напомним, что математическая часть изучаемой более пятидесяти лет проблемы создания систем активного экранирования (САЭ) состоит, в основном, в том, чтобы указать а) систему дополнительных источников звука, расположенных по периметру экранируемой области и подавляющих внутри нее шум из открытых границ с внешней областью, и б) управление этой системой.

Аппарат РП использует, как мы уже видели, специфические сеточные множества. Введем следующие обозначения: M – сеточная экранируемая область (комната), M^- – сеточная примыкающая область (улица), γ – многослойная сеточная граница между этими областями (проем окна). Полагаем, что акустическое поле описывается разностными уравнениями в этих областях. Формулы активного управления, построенные в [71], [72] на основе разностных потенциалов типа Коши, в применении к *периодическому по времени* звуковому полю обладают преимуществом перед всеми известными до их появления математическими моделями САЭ, заключающимся в одновременном наличии у них следующих свойств.

1. В области M не только исчезает шум, но и сохраняется неизменным создаваемый в ней звук. Другими словами, акустическое поле внутри M становится таким же, как и при выключенных источниках шума из M^-; более того, для источников звука в M сохраняется даже отражение (эхо) от препятствий из M^-, передаваемое через γ.

2. Предложенный алгоритм САЭ использует значение суммарного акустического поля в точках сеточной границы γ, создаваемого источниками как в M^-, так и в M. Это, безусловно, упрощает процесс измерений и обработки сигналов.

3. Для использования алгоритма нужно знать свойства акустической среды только в непосредственной близости от сеточной границы γ. В частности, не важна форма составной области и условия на ее внешней границе, не надо знать расположение и силу источников звука и шума, не надо знать состояние среды поодаль от сеточной границы.

Периодический характер поля по времени, охватываемый теорией [71], [72], может быть вызван как простой гармонической зависимостью (уравнение Гельмгольца), так и повторным протеканием некоторого процесса. В последнем случае можно действовать так: значение поля в точках границы γ можно сохранить в памяти компьютера при первичной реализации процесса, вычислить необходимое управление, а затем использовать его при каждом повторении.

Универсальные результаты подхода, предложенного в пионерской работе [71], послужили основой для многочисленных исследований в этом направлении, предпринятых В. С. Рябеньким и его коллегами Р. И. Вейцманом, Е. В. Зиновьевым, С. В. Цынковым и С. В. Утюжниковым с их сотрудниками и учениками и имеющих целью развитие и применение для различных приложений (см., например, [73]–[83]).

В 2005 г. В. С. Рябенький по приглашению С. В. Утюжникова посетил Манчестерский университет. В результате докладов на семинарах и многочисленных бесед В. С. Рябенький и С. В. Утюжников решили сконструировать лабораторную установку по активной защите от шума на основе универсального алгоритма [71], конкретизированного для случая одномерных разностных уравнений акустики. Эксперименты на созданной в Манчестере под руководством С. В. Утюжникова установке [84] подтвердили теоретические предсказания [71].

При всех указанных достоинствах САЭ на основе [71] этот алгоритм не может быть применен для управления в реальном времени *стохастическими* акустическими процессами, т. е. когда к текущему моменту времени $t = T$ нет данных об изменяющейся форме области и источников звука и шума при $t \geqslant T$. Добавим сюда еще следующие ограничения (если вернуться к примеру “комната-окно-улица”): а) микрофоны и излучатели звука должны быть расположены “в проеме окна”, т. е. вблизи γ; б) требуемый алгоритм для управления при $t = T$ должен использовать только информацию о суммарном акустическом поле на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Многолетние размышления над этой и аналогичными задачами управления стохастическими процессами в реальном времени вылились у В. С. Рябенького в следующие результаты.

1. Полное экранирование защищаемой области M от шума из M^- не может быть осуществлено, так как необходимое управление недоопределено в силу сделанных ограничений на доступную информацию вблизи γ.

2. Тем не менее реализуема возможность уменьшения шума в M в любое наперед заданное число n раз.

Соответствующие теория и алгоритм содержатся в [85]–[89]. Изюминкой этого алгоритма является то, что недостающая для управления информация о меняющейся с течением времени акустической обстановке вдали от окна (подвижные объекты, температура, дождь, снег, источники звука и т. п.) доставляется в проем окна слабым шумом (в случае большого n), сохраненным благодаря отказу от цели полного его подавления. По сути реализована идея разведки слабым шумом, который улавливается микрофонами и используется для своевременной выработки текущего управляющего сигнала.

Следующим шагом на пути создания будущей лабораторной установки по активному подавлению стохастического шума в реальном времени стала разработанная В. С. Рябеньким и В. И. Турчаниновым математическая модель, реализующая предложенный алгоритм на компьютере. Протекающий в сплошной среде акустический процесс в этой модели рассчитывается по устойчивой разностной схеме, аппроксимирующей уравнения акустики на достаточно мелкой сетке. Первые численные эксперименты подтвердили предсказания теории [85]–[89] и установили некоторые новые факты [90].

Следует отметить, что между дискретными и непрерывными постановками задачи активного управления имеется вполне естественная связь, устанавливаемая благодаря единому алгебраическому формализму потенциалов (2) и (5) и рассмотренным выше аппроксимационным свойствам РП.

Завершая этим ярким примером краткое описание приложений РП, мы абсолютно уверены, что метод РП, изобретенный В. С. Рябеньким более сорока пяти лет назад, привнесет еще немало интересных и удивительных решений в различные актуальные направления вычислительной математики и инженерии.

Виктор Соломонович обладает редким даром “зажигать” своими идеями студентов и молодых коллег, увлекательно рассказывая о возможностях и нерешенных проблемах РП. При этом он не жалеет времени на общение с ними и щедро делится богатейшим научным и житейским опытом. С абсолютной ответственностью подходя к выбору направления научной деятельности своего молодого коллеги, он создает вокруг себя ту неповторимую атмосферу увлеченности и творчества, которая дает возможность полного раскрытия способностей будущего ученого. Для Виктора Соломоновича и для его супруги Натальи Петровны Рябенькой, живших общими интересами (Наталья Петровна ушла из жизни 15 января 2014 г.), каждый ученик становился очень близким человеком. Это одна из причин, почему у В. С. Рябенького не так много учеников, как могло бы быть (другая причина в том, что в перестроечное время большое число его способных студентов попросту ушло из науки). Около десяти кандидатских диссертаций защищено под его руководством, а двое его учеников впоследствии стали докторами наук.

В настоящее время созданная Виктором Соломоновичем научная школа представлена его учениками, а также учениками его учеников, работающими как в России, так и за рубежом – в Великобритании, Германии, Израиле и США. Идеи и методы, предложенные Виктором Соломоновичем, получили дальнейшее существенное развитие в теоретических и прикладных исследованиях, которые проводятся в университетах, правительственных лабораториях (NASA, DOD) и научных центрах крупных промышленных компаний (Роснефть, Schlumberger, ALSTROM, EDF).

Сейчас, конечно, Виктор Соломонович уже не работает со студентами и не преподает, расходуя силы только на те свои идеи, где требуется весь его опыт и знания для оформления в конкретные результаты. Хотя преподавать он начал очень рано, еще в 1950-х годах после окончания аспирантуры, полностью его педагогический талант лектора и преподавателя раскрылся позднее – за более чем 30-летний период работы в МФТИ на кафедре вычислительной математики. Он создал совершенно оригинальный курс лекций по основам и методам вычислительной математики, многие главы которого являются авторскими. Работа над лекциями и книгой [4] привела к появлению учебного пособия [5], ставшего уже классическим учебником по этой ветви вычислительной математики и переведенного на многие языки. Итогом многолетнего преподавательского труда являются учебники [91] и [92] (в соавторстве с С. В. Цынковым). Опыт семинарских занятий также нашел отражение в созданном коллективом сотрудников кафедры и студентов под научным руководством В. С. Рябенького лабораторном практикуме [93] по основам вычислительной математики с программами для персонального компьютера. Теория РП изложена в монографиях [18], [94], содержащих также многочисленные и обновляемые с каждым новым изданием (1987, 2002, 2010 гг.) результаты по применению РП к задачам математической физики. В общей сложности В. С. Рябенький опубликовал более десяти учебников и монографий, а также более ста сорока научных работ в отечественных и зарубежных журналах.

В. С. Рябенький является профессором Московского физико-технического института (с 1970 г.), главным научным сотрудником Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Он заслуженный деятель науки РФ (2005 г.) и лауреат премии им. И. Г. Петровского (2007 г.), присужденной Президиумом РАН за книгу [94]. В разные периоды на протяжении многих лет действовали научные семинары, руководимые В. С. Рябеньким. В 1998 г. в рамках международной конференции ICOSAHOM'98 была организована секция в честь 50-летия научной карьеры Виктора Соломоновича и его выдающегося вклада в развитие вычислительной математики. В 2013 г. в Москве была проведена международная конференция "Разностные схемы и их приложения", посвященная 90-летию Виктора Соломоновича; доклады, сделанные на этой конференции, вошли в специальный выпуск журнала "Applied Numerical Mathematics" [95].

Кратко подводя итоги того вклада в прикладную математику, который уже внес Виктор Соломонович, перечислим следующие понятия, прочно связанные у нас с его именем: “теорема сходимости” Рябенького–Филиппова, “спектр семейства разностных операторов” Годунова–Рябенького, “гладкая локальная интерполяция” Рябенького, “разностный потенциал” Рябенького, “алгоритм активного шумоподавления” Рябенького.

Виктор Соломонович в свои девяносто два года увлечен любимым делом – математикой. Он сохраняет оптимизм, бодрость и удивительную ясность мышления. Искренность, принципиальность и доброжелательность Виктора Соломоновича сразу располагают к нему всех, кто с ним общается. У всех, кому посчастливилось провести с Виктором Соломоновичем время по разным поводам за дружескими разговорами и встречами в стенах ИПМ и не только, на всю жизнь остаются в памяти его воспоминания о военных эпизодах, о его друзьях и коллегах – искренние и эмоциональные, с яркими характеристиками. Испытывая к Виктору Соломоновичу самые добрые и благодарные чувства, желаем нашему дорогому другу, коллеге и учителю новых творческих удач, большого научного и физического долголетия, здоровья и счастья.

С. К. Годунов, *В. Т. Жуков*, *М. И. Лазарев*,
И. Л. Софронов, *В. И. Турчанинов*, *А. С. Холодов*,
С. В. Цынков, *Б. Н. Четверушкин*, *Е. Ю. Эпштейн*

Список цитированных работ

[1] В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов, *Об устойчивости разностных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956, 171 с.; нем. пер.: V. S. Rjabenki, A. F. Filippow, *Über die Stabilität von Differenzengleichungen*, Mathematik für Naturwissenschaft und Technik, **3**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960, viii+136 pp.

[2] Р. Курант, К. Фридрихс, Г. Леви, “О разностных уравнениях математической физики”, *УМН*, 1941, № 8, 125–160; пер. с нем.: R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, “Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik”, *Math. Ann.*, **100**:1 (1928), 32–74.

[3] P. D. Lax, R. D. Richtmyer, “Survey of the stability of linear finite difference equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9**:2 (1956), 267–293.

[4] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Введение в теорию разностных схем*, Физматгиз, М., 1962, 340 с.; англ. пер.: S. K. Godunov, V. S. Ryabenki, *Theory of difference schemes. An introduction*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Interscience Publishers John Wiley and Sons, New York, 1964, xii+289 pp.

[5] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Разностные схемы. Введение в теорию*, Наука, М., 1973, 400 с.; 2-е изд., 1977, 440 с.; фр. пер.: S. Godounov, V. Ryabenki, *Schemas aux différences. Introduction à la théorie*, Moscow, Editions Mir, 1977, 361 pp.; англ. пер. 1-го изд.: S. K. Godunov, V. S. Ryaben’kii, *Difference schemes. An introduction to the underlying theory*, Stud. Math. Appl., **19**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, xvii+489 pp.

[6] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, “Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений”, *УМН*, **18**:3(111) (1963), 3–14; англ. пер.: S. K. Godunov, V. S. Ryaben’kii, “Spectral stability criteria for boundary-value problems for non-self-adjoint difference equations”, *Russian Math. Surveys*, **18**:3 (1965), 1–12.

[7] С. К. Годунов, “Приложение”: А. Н. Малышев, *Введение в вычислительную линейную алгебру*, Наука, Новосибирск, 1991, 204–223.

[8] L. N. Trefethen, M. Embree, *Spectra and pseudospectra. The behavior of nonnormal matrices and operators*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2005, xviii+606 pp.

[9] С. К. Годунов, Ю. Д. Манузина, М. А. Назарьева, “Экспериментальный анализ сходимости численного решения к обобщенному решению в газовой динамике”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:1 (2011), 96–103; англ. пер.: S. K. Godunov, Yu. D. Manuzina, M. A. Nazar’eva, “Experimental analysis of convergence of the numerical solution to a generalized solution in fluid dynamics”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:1 (2011), 88–95.

[10] В. С. Рябенький, *Некоторые вопросы теории разностных краевых задач*, Дис. …докт. физ.-матем. наук, ИПМ АН СССР, М., 1969; *Матем. заметки*, **7**:5 (1970), 655–663; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, “Certain problems of the theory of difference boundary value problems”, *Math. Notes*, **7**:5 (1970), 393–397.

[11] А. Я. Белянков, *К развитию метода внутренних граничных условий в теории разностных схем*, Дис. …канд. физ.-матем. наук, ИПМ АН СССР, М., 1977.

[12] А. А. Резник, “Аппроксимация поверхностных потенциалов эллиптических операторов разностными потенциалами”, *Докл. АН СССР*, **263**:6 (1982), 1318–1321; англ. пер.: A. A. Reznik, “Approximation of the potential surfaces of elliptic operators by difference potentials”, *Soviet Math. Dokl.*, **25**:2 (1982), 543–545.

[13] А. А. Резник, *Аппроксимация поверхностных потенциалов эллиптических операторов разностными потенциалами и решение краевых задач*, Дис. …канд. физ.-матем. наук, МФТИ, М., 1983.

[14] Р. П. Федоренко, “Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **1**:5 (1961), 922–927; англ. пер.: R. P. Fedorenko, “A relaxation method for solving elliptic difference equations”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **1**:4 (1962), 1092–1096.

[15] В. С. Рябенький, *Общая конструкция разностной формулы Грина и соответствующих ей граничного проектора и внутренних граничных условий на основе вспомогательной разностной функции Грина и понятия четкого разностного следа*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша № 015, 1983.

[16] В. С. Рябенький, “Обобщенные проекторы Кальдерона и граничные уравнения на основе концепции четкого следа”, *Докл. АН СССР*, **270**:2 (1983), 288–292; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, “Generalization of Calderón projections and boundary equations on the basis of the notion of precise trace”, *Soviet Math. Dokl.*, **27**:3 (1983), 600–604.

[17] В. С. Рябенький, “Граничные уравнения с проекторами”, *УМН*, **40**:2(242) (1985), 121–149; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, “Boundary equations with projections”, *Russian Math. Surveys*, **40**:2 (1985), 147–183.

[18] В. С. Рябенький, *Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред*, Наука, М., 1987, 320 с.

[19] М. И. Лазарев, “Потенциалы линейных операторов и редукция краевых задач на границу”, *Докл. АН СССР*, **292**:5 (1987), 1045–1047; англ. пер.: M. I. Lazarev, “Potentials of linear operators and reduction of boundary value problems to the boundary”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:1 (1987), 175–177.

[20] И. Л. Софронов, *Развитие метода разностных потенциалов и применение его к решению стационарных задач дифракции*, Дис. …канд. физ.-матем. наук, МФТИ, М., 1984, 177 с.

[21] А. А. Резник, В. С. Рябенький, И. Л. Софронов, В. И. Турчанинов, “Об алгоритме метода разностных потенциалов”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **25**:10 (1985), 1496–1505; англ. пер.: A. A. Reznik, V. S. Ryaben’kii, I. L. Sofronov, V. I. Turchaninov, “An algorithm of the method of difference potentials”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **25**:5 (1985), 144–151.

[22] И. Л. Софронов, "Численный итерационный метод решения регулярных эллиптических задач", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **29**:6 (1989), 923–934; англ. пер.: I. L. Sofronov, "A numerical iterative method for solving regular elliptic problems", *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **29**:3 (1989), 193–201.

[23] В. С. Рябенький, И. Л. Софронов, "Численное решение пространственных внешних задач для уравнений Гельмгольца методом разностных потенциалов", *Численное моделирование в аэрогидродинамике*, Наука, М., 1986, 187–201.

[24] Е. В. Зиновьев, *Решение внешней задачи для уравнения Гельмгольца методом разностных потенциалов. Применение к расчету акустических взаимодействий осесимметричных элементов машин*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, М., 1990, 105 с.

[25] В. С. Рябенький, С. В. Цынков, *Искусственные граничные условия для численного решения внешних задач вязкого обтекания*, Части 1, 2, Препринты № 45, 46, ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, М., 1993.

[26] V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, "Artificial boundary conditions for the numerical solution of external viscous flow problems", *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**:5 (1995), 1355–1389.

[27] В. С. Рябенький, В. А. Торгашов, "Метод разностных потенциалов для численного решения внутренней задачи о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости", *Докл. РАН*, **337**:5 (1994), 450–453; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, V. A. Torgashov, "The method of difference potentials for the numerical solution of an interior problem on plane flow of a viscous incompressible fluid", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **50**:1 (1995), 108–113.

[28] В. С. Рябенький, В. А. Торгашов, "Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье–Стокса в переменных: завихренность и функция тока", *Матем. моделирование*, **8**:10 (1996), 100–112.

[29] М. Н. Мишков, *Построение искусственных граничных условий с использованием обобщенного предельного поглощения*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, ИММ, М., 1997, 109 с.

[30] М. Н. Мишков, В. С. Рябенький, "Исследование искусственных граничных условий, построенных с помощью периодизации и введения малого параметра, для задач дозвукового обтекания", *Матем. моделирование*, **10**:9 (1998), 87–98.

[31] Д. С. Каменецкий, "Разностные потенциалы и параметризация решений однородных разностных уравнений", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **38**:11 (1998), 1829–1843; англ. пер.: D. S. Kamenetskii, "Difference potentials and parameterization of solutions of homogeneous difference equations", *Comput. Math. Math. Phys.*, **38**:11 (1998), 1754–1767.

[32] Д. С. Каменецкий, "Разностные обобщенные операторы Пуанкаре–Стеклова и потенциалы с плотностью из пространства скачков", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **39**:8 (1999), 1328–1336; англ. пер.: D. S. Kamenetskii, "Difference generalized Poincaré–Steklov operators and potentials with densities from a jump space", *Comput. Math. Math. Phys.*, **39**:8 (1999), 1275–1282.

[33] S. V. Tsynkov, "On the definition of surface potentials for finite-difference operators", *J. Sci. Comput.*, **18**:2 (2003), 155–189.

[34] S. V. Tsynkov, "An application of nonlocal external conditions to viscous flow computations", *J. Comput. Phys.*, **116**:2 (1995), 212–225.

[35] S. V. Tsynkov, E. Turkel, S. Abarbanel, "External flow computations using global boundary conditions", *AIAA J.*, **34**:4 (1996), 700–706.

[36] S. V. Tsynkov, V. N. Vatsa, "Improved treatment of external boundary conditions for three-dimensional flow computations", *AIAA J.*, **36**:11 (1998), 1998–2004.

[37] S. V. Tsynkov, "External Boundary Conditions for three-dimensional problems of computational aerodynamics", *SIAM J. Sci. Comput.*, **21**:1 (1999), 166–206.

[38] S. Tsynkov, S. Abarbanel, J. Nordström, V. Ryaben'kii, V. Vatsa, "Global artificial boundary conditions for computation of external flows with jets", *AIAA J.*, **38**:11 (2000), 2014–2022.

[39] С. В. Цынков, *Нелокальные искусственные граничные условия для численного решения задач в неограниченных областях*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, М., 2003, 217 с.

[40] В. С. Рябенький, "Точный перенос разностных краевых условий", *Функц. анализ и его прил.*, **24**:3 (1990), 90–91; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, "Faithful transfer of difference boundary conditions", *Funct. Anal. Appl.*, **24**:3 (1990), 251–253.

[41] И. Л. Софронов, "Условия полной прозрачности на сфере для трехмерного волнового уравнения", *Докл. РАН*, **326**:6 (1992), 453–457; англ. пер.: I. L. Sofronov, "Conditions for complete transparency on the sphere for the three-dimensional wave equation", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **46**:2 (1993), 397–401.

[42] И. Л. Софронов, *Условия полной прозрачности для волнового уравнения*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 76, М., 1993, 25 с.

[43] A. Dedner, D. Kröner, I. L. Sofronov, M. Wesenberg, "Transparent boundary conditions for MHD simulations in stratified atmospheres", *J. Comput. Phys.*, **171**:2 (2001), 448–478.

[44] J. Ballmann, G. Britten, I. Sofronov, "Time-accurate inlet and outlet conditions for unsteady transonic channel flow", *AIAA J.*, **40**:9 (2002), 1745–1754.

[45] A. Arnold, M. Ehrhardt, I. Sofronov, "Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation: fast calculation, approximation, and stability", *Commun. Math. Sci.*, **1**:3 (2003), 501–556.

[46] И. Л. Софронов, "О применении прозрачных граничных условий в задачах аэроакустики", *Матем. моделирование*, **19**:8 (2007), 105–112.

[47] Н. А. Зайцев, И. Л. Софронов, "Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией", *Матем. моделирование*, **19**:8 (2007), 49–54.

[48] I. L. Sofronov, N. A. Zaitsev, "Numerical generation of transparent boundary conditions on the side surface of a vertical transverse isotropic layer", *J. Comput. Appl. Math.*, **234**:6 (2010), 1732–1738.

[49] И. Л. Софронов, "Дифференциальная часть прозрачных граничных условий для некоторых гиперболических систем уравнений второго порядка", *Докл. РАН*, **426**:5 (2009), 602–604; англ. пер.: I. L. Sofronov, "Differential part of transparent boundary conditions for certain hyperbolic systems of second-order equations", *Dokl. Math.*, **79**:3 (2009), 412–414.

[50] В. И. Турчанинов, "Свойство лакун решений разностного аналога пространственного волнового уравнения", *Докл. РАН*, **375**:4 (2000), 451; англ. пер.: V. I. Turchaninov, "The gap phenomenon for solutions of the difference 3D-wave equation", *Dokl. Math.*, **62**:3 (2000), 381.

[51] В. С. Рябенький, В. И. Турчанинов, С. В. Цынков, "Использование лакун решений 3D-волнового уравнения для вычисления решения на больших временах", *Матем. моделирование*, **11**:12 (1999), 113–126.

[52] В. С. Рябенький, В. И. Турчанинов, С. В. Цынков, "Неотражающие искусственные граничные условия для замены отбрасываемых уравнений с лакунами", *Матем. моделирование*, **12**:12 (2000), 108–127.

[53] V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, V. I. Turchaninov, "Long-time numerical computation of wave-type solutions driven by moving sources", *Appl. Numer. Math.*, **38**:1-2 (2001), 187–222.

[54] V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, V. I. Turchaninov, "Global discrete artificial boundary conditions for time-dependent wave propagation", *J. Comput. Phys.*, **174**:2 (2001), 712–758.

[55] S. V. Tsynkov, “Artificial boundary conditions for the numerical simulation of unsteady acoustic waves”, *J. Comput. Phys.*, **189**:2 (2003), 626–650.

[56] S. V. Tsynkov, “On the application of lacunae-based methods to Maxwell’s equations”, *J. Comput. Phys.*, **199**:1 (2004), 126–149.

[57] H. Qasimov, S. Tsynkov, “Lacunae based stabilization of PMLs”, *J. Comput. Phys.*, **227**:15 (2008), 7322–7345.

[58] E. T. Meier, A. H. Glasser, V. S. Lukin, U. Shumlak, “Modeling open boundaries in dissipative MHD simulation”, *J. Comput. Phys.*, **231**:7 (2012), 2963–2976.

[59] S. V. Petropavlovsky, S. V. Tsynkov, “Quasi-lacunae of Maxwell’s equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **71**:4 (2011), 1109–1122.

[60] S. V. Petropavlovsky, S. V. Tsynkov, “A non-deteriorating algorithm for computational electromagnetism based on quasi-lacunae of Maxwell’s equations”, *J. Comput. Phys.*, **231**:2 (2012), 558–585.

[61] В. С. Рябенький, В. И. Турчанинов, Е. Ю. Эпштейн, “Схема композиции алгоритмов для задач в составных областях на базе метода разностных потенциалов”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:10 (2006), 1853–1870; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, V. I. Turchaninov, Ye. Yu. Epshteyn, “Algorithm composition scheme for problems in composite domains based on the difference potential method”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:10 (2006), 1768–1784.

[62] Y. Epshteyn, “Algorithms composition approach based on difference potentials method for parabolic problems”, *Commun. Math. Sci.*, **12**:4 (2014), 723–755.

[63] M. Medvinsky, S. Tsynkov, E. Turkel, “The method of difference potentials for the Helmholtz equation using compact high order schemes”, *J. Sci. Comput.*, **53**:1 (2012), 150–193.

[64] M. Medvinsky, S. Tsynkov, E. Turkel, “High order numerical simulation of the transmission and scattering of waves using the method of difference potentials”, *J. Comput. Phys.*, **243** (2013), 305–322.

[65] D. S. Britt, S. V. Tsynkov, E. Turkel, “A high-order numerical method for the Helmholtz equation with non-standard boundary conditions”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **35**:5 (2013), A2255–A2292.

[66] S. Britt, S. Petropavlovsky, S. Tsynkov, E. Turkel, “Computation of singular solutions to the Helmholtz equation with high order accuracy”, *Appl. Numer. Math.*, **93** (2015), 215–241.

[67] S. Britt, S. Tsynkov, E. Turkel, “Numerical simulation of time-harmonic waves in inhomogeneous media using compact high order schemes”, *Commun. Comput. Phys.*, **9**:3 (2011), 520–541.

[68] E. Turkel, D. Gordon, R. Gordon, S. Tsynkov, “Compact 2D and 3D sixth order schemes for the Helmholtz equation with variable wave number”, *J. Comput. Phys.*, **232**:1 (2013), 272–287.

[69] Y. Epshteyn, S. Phippen, “High-order difference potentials methods for 1D elliptic type models”, *Appl. Numer. Math.*, **93** (2015), 69–86.

[70] J. Albright, Y. Epshteyn, K. R. Steffen, “High-order accurate difference potentials methods for parabolic problems”, *Appl. Numer. Math.*, **93** (2015), 87–106.

[71] В. С. Рябенький, “Разностная задача экранирования”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:1 (1995), 90–91; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, “Finite-difference shielding problem”, *Funct. Anal. Appl.*, **29**:1 (1995), 70–71.

[72] В. С. Рябенький, “Нелинейная разностная задача экранирования”, в статье ‘Совместные заседания семинара им. И. Г. Петровского по дифференциальным уравнениям и математическим проблемам физики и Московского математического общества (семнадцатая сессия, 24–27 января 1995 года)’, *УМН*, **50**:4(304) (1995), 146; англ. пер.: in ‘Joint sessions of the Petrovskii Seminar on differential equations

and mathematical problems of physics and of the Moscow Mathematical Society (seventeenth session, 24–27 January 1995)', *Russian Math. Surveys*, **50**:4 (1995).

[73] Р. И. Вейцман, В. С. Рябенький, “Разностные задачи экранирования и имитации”, *Докл. РАН*, **354**:2 (1997), 151–154; англ. пер.: R. I. Veĭtsman, V. S. Ryaben'kiĭ, “Difference problems of screening and imitation”, *Dokl. Math.*, **55**:3 (1997), 340–343.

[74] Р. И. Вейцман, В. С. Рябенький, “Разностные задачи имитации”, Тр. ММО, **58**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1997, 268–277; англ. пер.: R. I. Veĭtsman, V. S. Ryaben'kiĭ, “Finite difference problems in simulation”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1997, 239–248.

[75] Е. В. Зиновьев, В. С. Рябенький, *Способ активного подавления шума*, Патент Рос. Федерации № 6G01K11/16 (01.2.281001), Гос. ин-т патентной информации, М., 1996.

[76] J. Lončarić, V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, “Active shielding and control of noise”, *SIAM J. Appl. Math.*, **62**:2 (2001), 563–596.

[77] В. С. Рябенький, С. В. Утюжников, С. В. Цынков, “Задача активного экранирования в составных областях”, *Докл. РАН*, **411**:2 (2006), 164–166; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, S. V. Utyuzhnikov, S. V. Tsynkov, “The problem of active noise shielding in composite domains”, *Dokl. Math.*, **74**:3 (2006), 812–814.

[78] V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, S. V. Utyuzhnikov, “Inverse source problem and active shielding for composite domains”, *Appl. Math. Lett.*, **20**:5 (2007), 511–515.

[79] V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, S. V. Utyuzhnikov, “Active control of sound with variable degree of cancellation”, *Appl. Math. Lett.*, **22**:12 (2009), 1846–1851.

[80] В. С. Рябенький, “Идея использования слабого шума для управления подавлением сильного шума в экранируемой подобласти в реальном времени”, *Докл. РАН*, **430**:2 (2010), 166–168; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, “Use of weak noise for real-time control of strong noise suppression in a shielded subdomain”, *Dokl. Math.*, **81**:1 (2010), 137–138.

[81] A. W. Peterson, S. V. Tsynkov, “Active control of sound for composite regions”, *SIAM J. Appl. Math.*, **67**:6 (2007), 1582–1609.

[82] J. Lončarić, S. V. Tsynkov, “Optimization of acoustic source strength in the problems of active noise control”, *SIAM J. Appl. Math.*, **63**:4 (2003), 1141–1183.

[83] J. Lončarić, S. V. Tsynkov, “Optimization of power in the problems of active control of sound”, *Math. Comput. Simulation*, **65**:4-5 (2004), 323–335.

[84] H. Lim, S. V. Utyuzhnikov, Y. W. Lam, A. Turan, M. R. Avis, V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, “Experimental validation of the active noise control methodology based on difference potentials”, *AIAA J.*, **47**:4 (2009), 874–884.

[85] В. С. Рябенький, “Подавление в реальном времени шума в защищаемой подобласти трехмерного пространства на основе информации от синхронной разведки шумом”, *Докл. РАН*, **439**:3 (2011), 319–322; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, “Real-time noise suppression in a three-dimensional protected subdomain as based on information from synchronous noise exploration”, *Dokl. Math.*, **84**:1 (2011), 562–564.

[86] В. С. Рябенький, “Модель активного экранирования заданной подобласти от шума внешних источников в текущем времени”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:3 (2011), 480–491; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, “Model of real-time active noise shielding of a given subdomain subject to external noise sources”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:3 (2011), 444–454.

[87] В. С. Рябенький, “Синхронная разведка для управления подавлением внешнего шума в трехмерной подобласти в реальном времени”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:10 (2011), 1889–1904; англ. пер.: V. S. Ryaben'kii, “Synchronous exploration for the control of real-time external noise suppression in a three-dimensional subdomain”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:10 (2011), 1777–1791.

[88] В. С. Рябенький, “Ключевая информация для управления решениями линейных разностных схем в составных областях”, *Докл. РАН*, **444**:4 (2012), 376–377; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, “Key information to control solutions of linear difference schemes in composite domains”, *Dokl. Math.*, **85**:3 (2012), 441–442.

[89] В. С. Рябенький, “Математическая модель устройств подавления внешнего шума в подобласти пространства”, *Матем. моделирование*, **24**:8 (2012), 3–31; англ. пер.: V. S. Ryaben’kii, “Mathematical model of devices used to suppress external noise in a subregion of space”, *Math. Models Comput. Simul.*, **5**:2 (2013), 103–121.

[90] В. С. Рябенький, В. И. Турчанинов, *Численные эксперименты по управлению подавлением шума в реальном времени*, Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (в печати).

[91] В. С. Рябенький, *Введение в вычислительную математику*, Физматлит, М., 1994, 335 с.; 2-е изд., 2000, 296 с.; 3-е изд., 2008, 288 с.

[92] V. S. Ryaben’kii, S. V. Tsynkov, *A theoretical introduction to numerical analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, xiv+537 pp.

[93] В. Д. Иванов, В. И. Косарев, А. И. Лобанов, И. Б. Петров, В. Б. Пирогов, В. С. Рябенький, Т. К. Старожилова, А. Г. Тормасов, С. В. Утюжников, А. С. Холодов, *Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики»*, Учеб. пособие МФТИ, 2-е изд., испр. и доп., МЗ Пресс, М., 2003, 194 с.

[94] *Метод разностных потенциалов и его приложения*, 2-е изд., испр. и доп., Физматлит, М., 2002, 494 с.; 3-е изд., 2010, 432 с.; англ. пер. 2-го изд.: V. S. Ryaben’kii, *Method of difference potentials and its applications*, Springer Ser. Comput. Math., **30**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, xviii+538 с.

[95] *Appl. Numer. Math.*, **93**, Special issue: International Conference Difference Schemes and Applications in honor of the 90-th birthday of professor V. S. Ryaben’kii (2015), 1–294.